Н. Е. Кутузовъ.

НАГЛЯДНАЯ ГЕОМЕТРІЯ.

Для двухклассныхъ школъ М. Н. П. и другихъ начальныхъ училищъ.

2-е ИСПРАВЛЕННОЕ ИЗДАНІЕ.



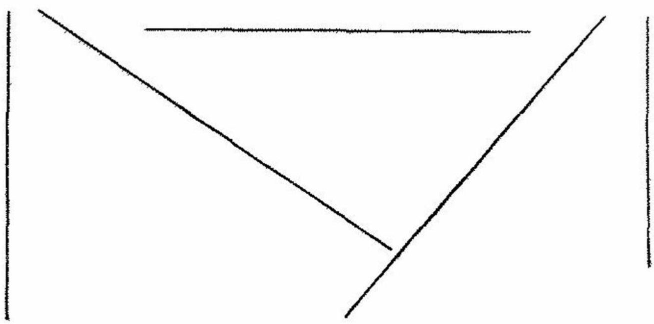


Изданіе „СОТРУДНИКЪ ШКОЛЪ"
А К Залѣсской
Воздвиженка, домъ Армандъ Телеф 34-23.
МОСКВА.



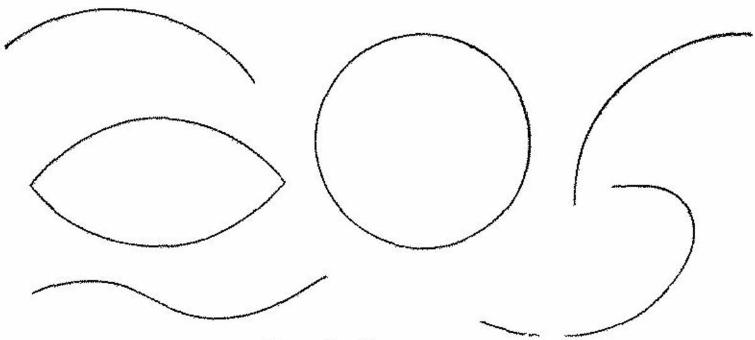
ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЯ ПОНЯТІЯ О ЛИНІЯХЪ И ПОВЕРХНОСТЯХЪ.

Линіи бываютъ **прямыя, кривыя** и **ломаныя.** Форму прямой линіи принимаетъ туго натянутый тонкій шну-



Черт 1. Прямыя линіи.

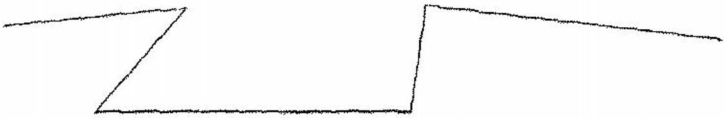
рокъ. Прямая линія выдерживаетъ одно и то же направленіе по всей своей длинѣ. Если линія состоитъ изъ нѣ-



Черт. 2. Кривыя линіи.

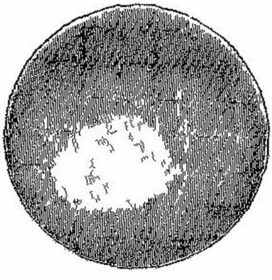
сколькихъ прямыхъ, идущихъ въ разныхъ направле-

ніяхъ, то она называется ломаной. Остальныя линіи: не прямыя и не ломаныя, называются кривыми (смотри чертежи 1, 2 и 3).

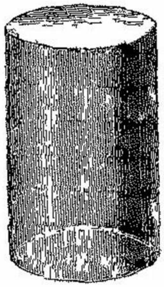


Черт. 3. Ломаная линія.

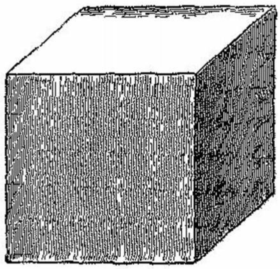
Разсматривая **поверхности** различныхъ предметовъ, мы замѣчаемъ, что одни предметы, какъ напримѣръ, шаръ, цилиндръ имѣютъ **кривыя** поверхности; другіе предметы, напримѣръ, кубъ, имѣютъ прямыя поверхности.



Черт. 4. Шаръ.



Черт. 5. Цилиндръ.



Черт. 6. Кубъ.

По кривой поверхности или совсѣмъ нельзя провести прямую линію, напримѣръ, поверхность шара, или же прямую линію можно провести только въ одномъ направленіи, напримѣръ, боковая поверхность цилиндра. На прямыхъ поверхностяхъ прямыя линіи можно проводить во всѣхъ направленіяхъ. Поверхность, по которой можно проводить прямыя линіи во всѣхъ направленіяхъ, называется **плоскостью**.

УПРАЖНЕНІЯ. 1. Указать на окружающихъ предметахъ, гдѣ проходятъ прямыя и кривыя линіи.

2. Какую линію представляетъ изъ себя край листа бумаги?

3. Свернуть листъ бумаги такъ, чтобы его край представилъ изъ себя кривую линію.

4. Разрѣзать бумагу по прямой линіи.

5. Разрѣзать бумагу по кривой линіи.

6. На окружающихъ предметахъ указать ломаныя линіи.

7. Разрѣзать листъ бумаги по ломаной линіи.

8. Указать на окружающихъ предметахъ кривыя поверхности.

9. Указать на окружающихъ предметахъ плоскости.

10. Какова поверхность яблока?

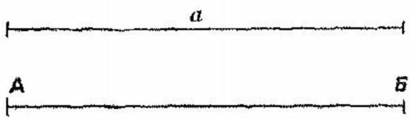
11. Какова поверхность классной доски?

12. Положить листъ бумаги такъ, чтобы его поверхность была плоской.

13. Свернуть листъ бумаги такъ, чтобы его поверхность была кривой поверхностью.

I. ПРЯМЫЯ ЛИНІИ.

1. ОБОЗНАЧЕНІЕ ЛИНІЙ. Чтобы обозначить прямую линію на бумагѣ, нужно при помощи линейки провести черту и на концахъ проведенной черты поставить двѣ точки. Точки на концахъ линіи ставятся для того, чтобы показать, что именно здѣсь линія кончается; если же точекъ не поставить, то можно думать, что линія не ограничена, т.-е. имѣетъ неопредѣленную длину.

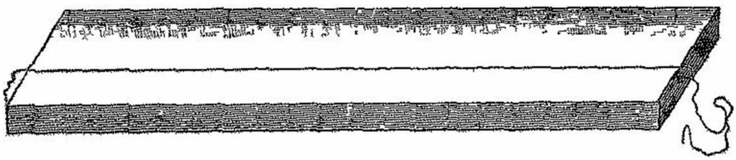


Черт. 7.

Чтобы линіи отличать другъ отъ друга, ихъ подписываютъ буквами. Можно линію подписать одной буквой, которая въ такомъ случаѣ ставится по серединѣ, или двумя бук-

вами, которыя ставятся по концамъ линіи. На чертежѣ 7 первая линія подписана одной буквой, а вторая—двумя буквами. (Черт. 7).

Когда нужно бываетъ обозначить прямую линію на довольно большомъ протяженіи, напримѣръ, въ длину бревна или длинной доски, тогда поступаютъ *такъ*. Берутъ длинный шнуръ, намазываютъ его углемъ или мѣломъ; натягиваютъ шнуръ и укрѣпляютъ его на концахъ линіи. Потомъ, приподнявъ шнуръ за середину, ударяютъ имъ по бревну или доскѣ. Слѣдъ, оставшійся отъ шнура, обозначитъ прямую линію. (Черт. 8).



Черт. 8

Чтобы обозначить прямую линію на поверхности земли, поступаютъ такъ. На концахъ линіи ставятъ по колу, которые въ данномъ случаѣ называются **вѣхами**. *Затѣмъ один человѣкъ смотритъ* на поставленныя вѣхи, какъ показано на чертежѣ 9, а другой разставляетъ новыя вѣхи въ тѣхъ точкахъ, гдѣ ему велитъ первый.



Черт. 9. Вѣшеніе прямой линіи.

(Черт. 9). Линія провѣшена правильно тогда, когда крайняя вѣха будетъ закрывать всѣ остальныя. Если

такимъ образомъ поставить достаточное количество вѣхъ, то прямая линія на поверхности земли обозначится довольно ясно.

УПРАЖНЕНІЯ. 1. Начертить на бумагѣ нѣсколько прямыхъ линій и обозначить ихъ буквами.

2. При помощи шнура обозначить на полу или на классной доскѣ нѣсколько прямыхъ линій.

3. Провѣшить прямую линію на поверхности земли.

II. СВОЙСТВА ПРЯМОЙ ЛИНІИ. УПРАЖНЕНІЯ.
1. Взять на плоскости бумаги точку и провести черезъ нее прямую линію. Можно ли черезъ эту точку провести прямую въ другомъ направлении? (Прямая линія иногда называется просто «прямая»).

2. Взять на плоскости бумаги точку и провести черезъ нее 5 прямыхъ линій.

3. Взять на плоскости бумаги двѣ точки и начертить между ними линіи—прямую, кривую и ломаную. Какая изъ начерченныхъ линій самая короткая?

4. Взять на плоскости бумаги двѣ точки и провести между ними прямую. Можно ли черезъ взятыя точки провести новую прямую линію, которая не слилась бы съ первой?

5. Начертить прямую линію, продолжить ее въ обѣ стороны на нѣкоторое разстояніе. Можно ли прямую продолжить дальше?

ВЫВОДЫ. 1. Черезъ одну точку можно провести на плоскости безчисленное множество прямыхъ линій.

2. Прямая линія есть кратчайшее разстояніе между двумя точками.

3. Черезъ двѣ точки можно провести только одну прямую линію.

4. Прямая линія можетъ быть продолжена въ обѣ стороны до безконечности.

КАКЪ ПРОВѢРИТЬ ЛИНЕЙКУ. Взять на бумагѣ двѣ точки, приложить къ нимъ линейку и начертить линію. Потомъ тѣмъ же краемъ приложить линейку къ даннымъ точкамъ съ другой стороны и провести другую линію. Если линейка правильна, то первая и вторая линіи сольются на всемъ протяженіи, потому что между двумя точками можно провести только одну прямую линію.

III. **ИЗМѢРЕНІЕ ПРЯМЫХЪ ЛИНІЙ.** Когда мы желаемъ измѣрить какую-нибудь линію, напримѣръ, длину комнаты, мы беремъ другую линію, длина которой намъ хорошо извѣстна, напримѣръ, аршинъ и откладываемъ аршиномъ по длинѣ комнаты столько разъ, сколько можно. Если получится остатокъ меньше аршина, мы беремъ линію въ вершокъ и этой линіей измѣряемъ остатокъ. Допустимъ, что аршинъ отложился по длинѣ комнаты 12 разъ, и получился остатокъ, въ которомъ вершокъ отложился 6 разъ; тогда мы говоримъ, что длина комнаты равняется 12 аршинамъ и 6 вершкамъ. И всегда, когда измѣряемъ какую-нибудь линію, мы беремъ извѣстную, опредѣленную линію (аршинъ, сажень, футъ, вершокъ и проч.) и откладываемъ этой линіей по линіи измѣряемой.

Кромѣ упомянутыхъ мѣръ—аршина, саженей, фута и проч.—существуютъ и другія мѣры для измѣренія линій. Изъ нихъ особенно замѣчательны **метрическія мѣры**, которыя приняты почти вездѣ въ западныхъ государствахъ и у насъ въ Россіи съ каждымъ годомъ распространяются все больше и больше.

Основная мѣра длины въ метрической системѣ—**метръ**, который равенъ приблизительно $22^1/_2$ вершкамъ. Метръ дѣлится на 10 дециметровъ, дециметръ дѣлится на 10 сантиметровъ, а сантиметръ—на 10 миллиметровъ. 10 метровъ составляютъ декаметръ; 10 декаметровъ равны 1 гектометру, а 10 гектометровъ равны 1 километру. Эта система мѣръ удобна тѣмъ, что раздробленіе и превращеніе однѣхъ мѣръ въ другія производятся посредствомъ

умноженія и дѣленія чиселъ на 10, на 100, на 1000, а такія дѣйствія выполняются очень легко. На чертежѣ 10



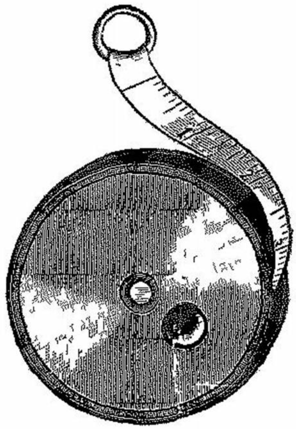
Черт. 10.

изображенъ дециметръ съ дѣленіями на сантиметры и миллиметры.

На поверхности земли линіи большой длины измѣряются посредствомъ землемѣрной цѣпи или рулетки. (Черт. 11 и 12). Землемѣрная цѣпь обыкновенно бываетъ длиною въ 10 саженъ.



Черт. 11. Землемѣрная цѣпь (въ собранномъ видѣ).



Черт. 12. Рулетка.

УПРАЖНЕНІЯ. 1. Сколько метровъ въ 70 децим., въ 125 децим., въ 600 сантим., въ 1700 сантим., въ 25 де-

каметр., въ 12 гектометр., въ 135 гектометр., въ 15 килом., въ 29 километр., въ 130 километр.?

2. Сколько сантиметровъ въ 7 децим., въ 18 децим., въ 18 метрахъ, въ 2 декаметр., въ 5 гектометр., въ 70 миллиметрахъ, въ 85 миллиметрахъ, въ 125 миллиметрахъ?

3. Сколько километровъ въ 750 гектометрахъ, въ 840 гектометрахъ, въ 37000 декаметрахъ, въ 85700 декаметрахъ, въ 27000 метрахъ, въ 12500 метрахъ, въ 7800000 сантиметрахъ, въ 1500000 сантиметрахъ?

4. Сколько миллиметровъ въ 7 сантим., въ 18 сантиметрахъ, въ 8 сантим. 6 миллиметр., въ 5 сантим. 3 миллиметр., въ 5 метрахъ, въ 3 метрахъ 3 сантим., въ $5^1/_2$ сантим., въ $3^1/_2$ сантим.?

5. Измѣрить сантиметромъ длину и ширину тетради.

6. Измѣрить метромъ длину и ширину комнаты.

7. Измѣрить длину и ширину стола сначала метромъ, а потомъ футомъ.

8. Сколько сантиметровъ (приблизительно) въ одномъ дюймѣ?

9. Сколько сантиметровъ (приблизительно) въ 6 дюймахъ, въ 8 дюймахъ, въ 1 футѣ?

10. Начертить линію и отложить на ней отрѣзки въ 5 сантим., въ 4 сантим., въ 3 сантим.

11. Начертить прямыя линіи: въ 1 дециметръ, въ 8 сантим., въ $7^1/_2$ сантим., въ 6 сантим. 4 миллим., въ 5 сантим. 8 миллим.

12. Начертить прямыя линіи: въ 62 миллим., въ 77 миллим., въ 85 миллим., въ 125 миллим., въ 136 миллиметровъ.

IV. ДѢЙСТВІЯ НАДЪ ПРЯМЫМИ ЛИНІЯМИ.

УПРАЖНЕНІЯ. 1. Начертить двѣ прямыя линіи· одну въ 5 сантим., а другую въ 3 сантим.; потомъ начертить третью линію, равную суммѣ двухъ первыхъ.

2. Начертить три линіи, а потомъ начертить четвертую, равную суммѣ трехъ первыхъ.

3. Начертить двѣ неравныя линіи, потомъ начертить третью линію, равную разности двухъ первыхъ.

4. Начертить линію, а потомъ начертить вторую, которая была бы въ 3 раза длиннѣе первой.

5. При помощи бумажки раздѣлить прямую линію на 2 равныя части.

6. При помощи бумажки раздѣлить прямую на 4, на 8, на 16 равныхъ частей.

7. Начертить линію, а потомъ начертить вторую, которая была бы: а) въ $4^1/_2$ раза длиннѣе первой; б) въ $5^1/_2$ разъ длиннѣе первой; в) въ $2^1/_2$ раза длиннѣе первой; г) въ $4^3/_4$ длиннѣе первой.

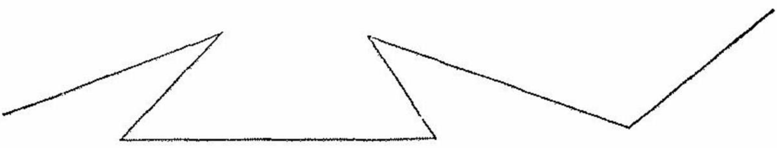
8. Взята линія въ 17 аршинъ, въ одну сторону эта линія продолжена на 15 дюймовъ, а въ другую на 13 дюймовъ. Какова стала длина линіи?

9. Прямая линія раздѣлена на 2 неравныя части, одна часть равна 5 дюймамъ, а другая на 3 дюйма больше. Опредѣлить длину всей линіи.

10. Прямая линія раздѣлена на 2 неравныя части; одна часть въ 3 раза больше другой. Опредѣлить длину всей линіи, если меньшая часть равна 5 сантиметрамъ 4 миллиметрамъ.

11. Прямая линія раздѣлена на 2 неравныя части; одна часть больше другой въ 4 раза. Опредѣлить отрѣзки данной линіи, если первая часть на 15 вершковъ длиннѣе второй.

12. Выпрямить ломаную линію, изображенную на чер-



Черт. 13.

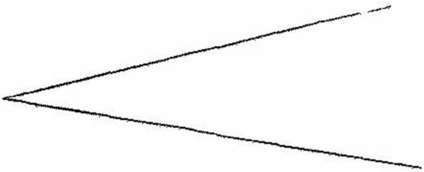
тежѣ 13, т.-е. начертить такую прямую, которая равняется суммѣ всѣхъ частей данной ломаной.

13. Начертить прямую, равную половинѣ выпрямленной ломаной. (Черт. 13).

ВЫВОДЪ. Надъ линіями можно производить тѣ же дѣйствія, что и надъ числами: 1) линіи можно складывать, 2) изъ одной линіи можно вычесть другую, 3) можно *линію увеличить въ нѣсколько разъ*, 4) можно раздѣлить линію на нѣсколько равныхъ частей, узнать, во сколько разъ одна линія больше другой.

II. УГЛЫ.

I. ПОНЯТІЕ ОБЪ УГЛѢ. Возьмемъ на плоскости бумаги точку; проведемъ изъ этой точки двѣ прямыя линіи, какъ показано на чертежѣ 14. Начерченныя линіи образовали **уголъ.** Точка, гдѣ линіи пересѣкаются, называется **вершиной** угла, а линіи, образующія уголъ, называются **сторонами** угла.



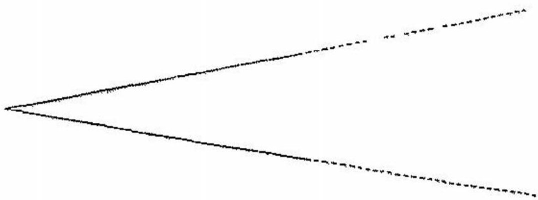
Черт. 14.

УПРАЖНЕНІЯ. 1. Начертить нѣсколько угловъ.

2. Показать углы, образуемые пересѣкающимися прямыми на поверхностяхъ окружающихъ предметовъ.

3. Вырѣзать изъ бумаги нѣсколько угловъ.

4. Возьмемъ на поверхности бумаги точку, проведемъ



Черт. 15.

изъ этой точки двѣ прямыя линіи такъ, чтобы онѣ обра-

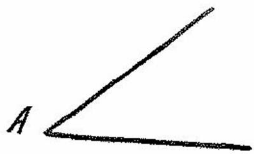
зовали уголъ. (Черт. 15). Продолжимъ стороны угла нѣсколько дальше (на чертежѣ это обозначено пунктиромъ), уголъ останется тотъ же, хотя стороны его будутъ длиннѣе.

5. На глазомѣръ начертить нѣсколько равныхъ угловъ съ сторонами разной длины.

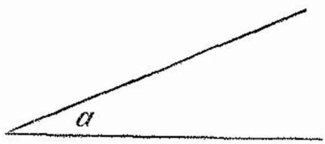
ВЫВОДЫ. 1. Уголъ между линіями показываетъ наклоненіе линій другъ къ другу.

2. Величина угла не измѣняется отъ увеличенія и уменьшенія его сторонъ.

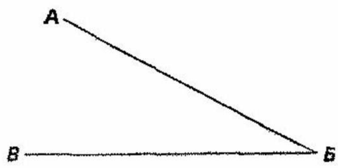
II. ОБОЗНАЧЕНІЕ УГЛОВЪ. Углы обозначаются буквами. Можно уголъ обозначить одной буквой, которая ставится или внутри угла, или при вершинѣ; можно уголъ обозначить и тремя буквами; въ такомъ случаѣ одна буква ставится при вершинѣ, а двѣ другія на сторонахъ угла. Когда уголъ обозначенъ тремя буквами, то при чтеніи его буква, стоящая при вершинѣ, называется между буквами, стоящими при сторонахъ угла.



Черт. 16.



Черт. 17.



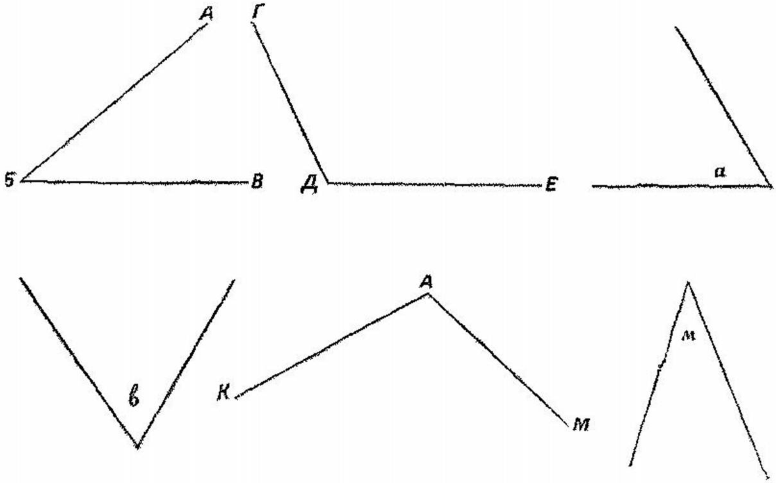
Черт. 18.

Например̀ъ, уголъ, обозначенный на чертежѣ 18, нужно прочитать такъ: *АБВ* или *ВБА*.

УПРАЖНЕНІЯ. 1. Назвать углы, изображенные на чертежѣ 19.

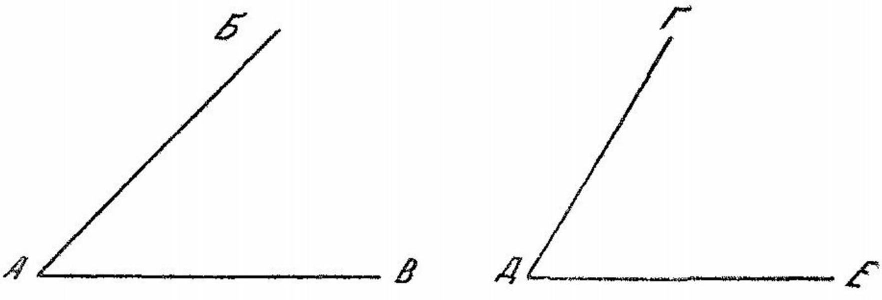
2. Начертить нѣсколько угловъ и обозначить ихъ буквами.

III. СРАВНЕНІЕ УГЛОВЪ. На отдѣльномъ листѣ бумаги начертимъ два угла *БАВ* и *ГДЕ* (черт. 20) и сравнимъ



Черт. 19.

ихъ величину. Для этого вырѣжемъ уголъ ГДЕ и наложимъ его на уголъ *БАВ* такъ, чтобы вершина *Д* совмѣсти-

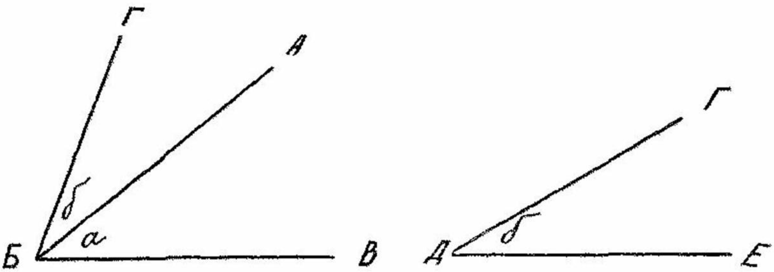


Черт. 20.

лась съ вершиной *А*, а сторона *ДЕ* пошла по сторонѣ *АВ*. Если сторона *ГД* пойдетъ по сторонѣ *БА*, то уголъ *ГДЕ* совмѣстится съ угломъ *БАВ*. Такіе углы называются

равными. Если сторона *ГД* пойдетъ внутри угла *БАВ*, то уголъ *БАВ* **больше** угла *ГДЕ*; а если сторона *ГД* пойдетъ внѣ угла *БАВ*, то уголъ *БАВ* **меньше** угла *ГДЕ*.

IV. СЛОЖЕНІЕ И ВЫЧИТАНІЕ УГЛОВЪ. Чтобы сложить два угла, напримѣръ, *АБВ* и *ГДЕ* (черт. 21), нужно

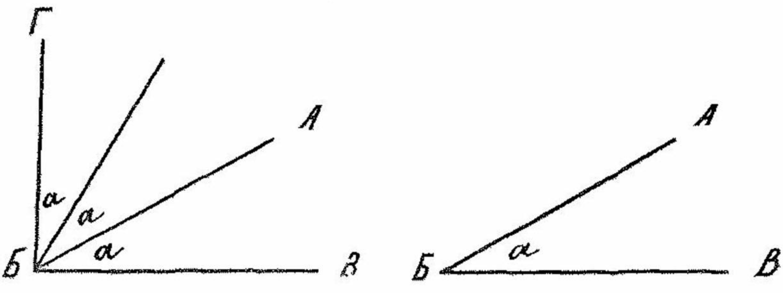


Черт. 21.

приложить уголъ *ГДЕ* къ углу *АБВ* такъ, чтобы вершины ихъ совмѣстились, сторона *ДЕ* пошла по сторонѣ *АБ*, а сторона *ГД* пошла внѣ угла *АБВ*. Получится уголъ *ГБВ*, который будетъ представлять сумму данныхъ угловъ *АБВ* и *ГДЕ* (черт. 21).

Если уголъ *ГБВ* мы примемъ за уменьшаемое, а уголъ *АБВ* за вычитаемое, то уголъ *ГБА* будетъ разностью угловъ *ГБВ* и *АБВ*.

V. УМНОЖЕНІЕ И ДѢЛЕНІЕ УГЛОВЪ. Чтобы умно-



Черт. 22.

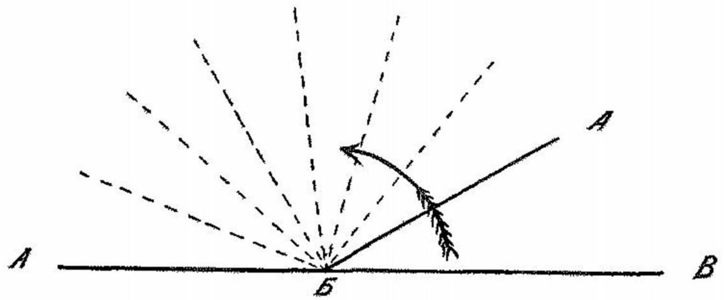
жить уголъ *АБВ* на какое-нибудь число, напримѣръ, на 3,

нужно уголъ *АБВ* взять слагаемымъ 3 раза; получится уголъ *ГБВ*, который и будетъ произведенiемъ угла АБВ на 3 (смотри черт. 22).

Принявъ уголъ *ГБВ* за дѣлимое, мы видимъ, что уголъ АБВ представляетъ частное отъ дѣленiя угла *ГБВ* на 3.

ВЫВОДЪ. Надъ углами можно производить всѣ четыре дѣйствiя: сложенiе, вычитанiе, умноженiе и дѣленiе.

VI. РАЗВЕРНУТЫЙ УГОЛЪ. Допустимъ, что двѣ линiи, выходя изъ одной точки, образуютъ уголъ *АБВ* (черт. 23).



Черт. 23.

Вращая линiю *АБ* по направленiю, указанному на чертежѣ стрѣлкой, мы можемъ достигнуть такого положенiя, что линiи *АБ* и *БВ* составятъ одну прямую, т.-е. одна сторона угла будетъ служить продолженiемъ другой стороны. Въ такомъ случаѣ уголъ называется **развернутымъ.**

Очевидно, что развернутые углы при наложенiи совмѣщаются; слѣдовательно, **всѣ развернутые углы равны между собой.**

ВОПРОСЫ. 1. Какой уголъ образуютъ минутная и часовая стрѣлки, когда часы показываютъ ровно 6 часовъ?

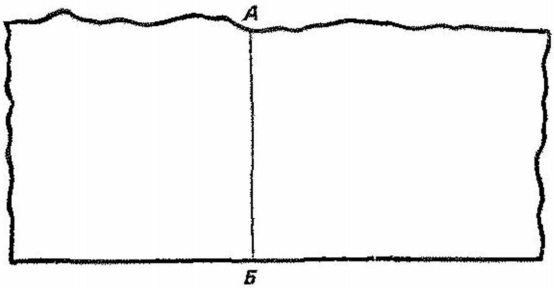
2. Сколько разъ въ теченiе сутокъ минутная и часовая стрѣлки образуютъ развернутый уголъ?

VII. ПРЯМОЙ УГОЛЪ. Половина развернутаго угла называется **прямымъ** угломъ. Такъ какъ развернутые углы

равны, то и половины ихъ, т.-е. **прямые углы равны между собой.**

Прямые углы можно получить такимъ способомъ.

Возьмемъ полоску бумаги, у которой одинъ край обрѣзанъ по прямой линіи (черт. 24). Перегнемъ эту



Черт. 24.

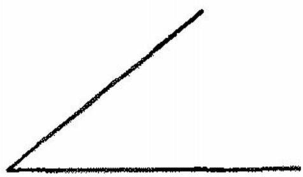
полоску по линіи *АБ* такъ, чтобы правая и лѣвая части ровнаго края совпали. Тогда прямой край бумаги и перегибъ образуютъ два угла, эти углы въ суммѣ составляютъ развернутый уголъ и равны между собой, потому что ихъ вершины и стороны при наложеніи совпадаютъ; слѣдовательно, они прямые.

Линіи, образующія прямой уголъ, называются **перпендикулярными** другъ къ другу. Такъ, на нашей полоскѣ линія *АБ* перпендикулярна къ ровному краю, а ровный край полоски въ свою очередь перпендикуляренъ къ линіи *АБ*.

Уголъ, который больше прямого, называется **тупымъ**



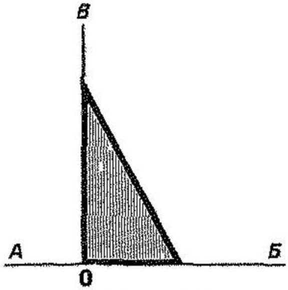
Черт. 25 Тупой уголъ.



Черт. 26. Острый уголъ.

угломъ, а уголъ меньше прямого называется **острымъ** угломъ. (Черт. 25 и 26).

Линіи, образующія острые и тупые углы, называются **наклонными** другъ къ другу.



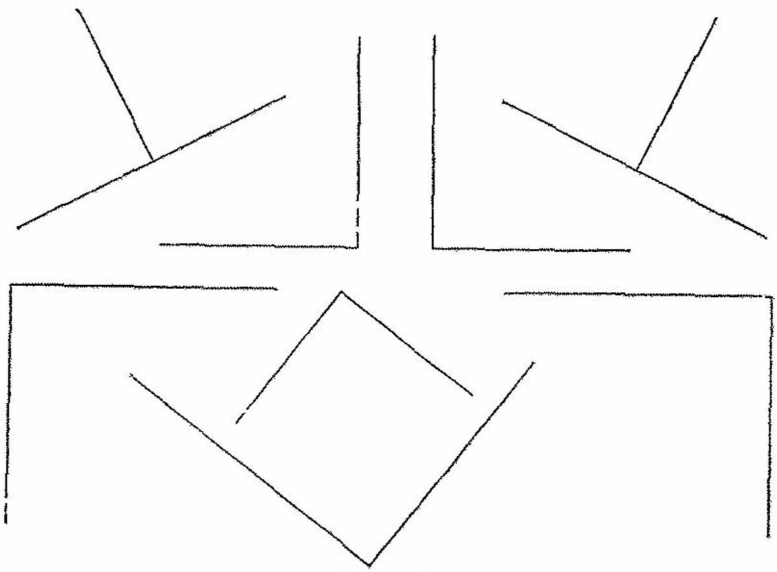
Черт. 27.

Прямые углы можно чертить при помощи чертежнаго наугольника. (Смотри чертежъ 27; линія *ВО* перпендикулярна къ линіи *АБ*).

УПРАЖНЕНІЯ. 1. Начертить нѣсколько прямыхъ угловъ, какъ показано на чертежѣ 28.

2. Указать прямые углы на поверхностяхъ окружающихъ предметовъ.

3. На чертежѣ 28 показать, какая линія къ какой перпендикулярна?



Черт. 28.

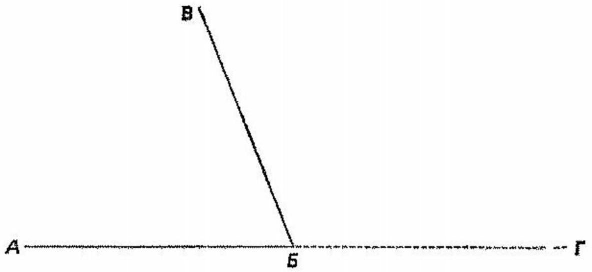
4. На окружающихъ предметахъ показать перпендикулярныя линіи.

5. Начертить нѣсколько острыхъ и тупыхъ угловъ и показать линіи, наклонныя другъ къ другу.

6. На окружающихъ предметахъ указать линіи, наклонныя другъ къ другу.

7. Начертить на бумагѣ прямую линію; при помощи наугольника провести къ этой прямой нѣсколько перпендикуляровъ.

VIII. СМЕЖНЫЕ УГЛЫ. Начертимъ уголъ *АБВ*. (Черт. 29) Продолжимъ сторону *АБ* за вершину угла; у насъ обра-



Черт. 29.

зуется еще уголъ *ВБГ*, который имѣетъ съ даннымъ угломъ общую вершину въ точкѣ *Б* и общую сторону *ВБ*, а двѣ другія стороны этихъ угловъ составляютъ одну прямую линію. Такіе углы называются **смежными.**

УПРАЖНЕНІЯ. 1. Начертить нѣсколько смежныхъ угловъ.

2. На окружающихъ предметахъ указать смежные углы.

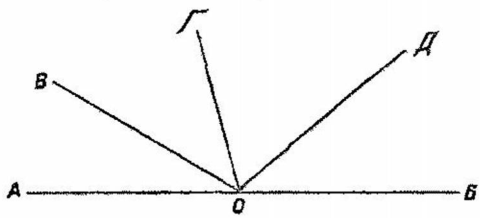
3. Взять листъ бумаги; обрѣзать одинъ край этого листа по прямой линіи; перегнуть листъ такъ, чтобы перегибъ и ровный край образовали смежные углы.

Смежные углы въ суммѣ составляютъ развернутый уголъ. Слѣдовательно, **сумма смежныхъ угловъ равна 2 прямымъ угламъ.**

Если смежные углы равны между собой, то очевидно, что каждый изъ нихъ будетъ прямой. Мы говорили, что

прямымъ угломъ называется половина развернутаго угла; теперь мы можемъ сказать и такъ: уголъ, равный своему смежному называется **прямымъ угломъ**.

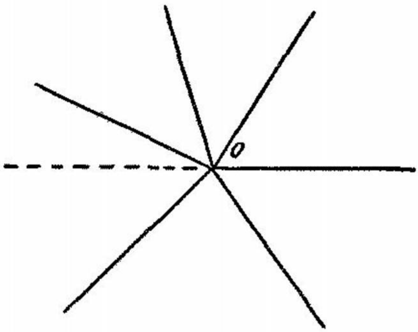
Начертимъ прямую *АБ* (Черт. 30). Изъ точки *О* проведемъ линіи *ОВ*, *ОГ* и *ОД*; образуются четыре угла, которые имѣютъ общую вершину въ точкѣ *О* и расположены по одну сторону прямой *АБ*.



Черт. 30.

Такъ какъ эти углы въ суммѣ составляютъ развернутый уголъ, то можно сказать, что **сумма всѣхъ угловъ, которые имѣютъ общую вершину и расположены по одну сторону прямой, равна двумъ прямымъ угламъ.**

Возьмемъ на плоскости бумаги точку *О* и проведемъ изъ нея нѣсколько прямыхъ линій; образуются углы, имѣющіе общую вершину въ точкѣ *О*. (Черт. 31). Продолжимъ одну линію за точку *О*, тогда увидимъ, что всѣ образовавшіеся углы въ суммѣ составляютъ два развернутыхъ угла, т.-е. 4 прямыхъ угла.



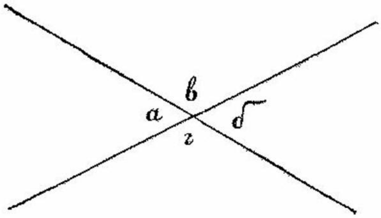
Черт. 31.

ВЫВОДЪ. Сумма угловъ, расположенныхъ вокругъ одной точки, равна 4 прямымъ угламъ.

IX. ПРОТИВОПОЛОЖНЫЕ ИЛИ ВЕРТИКАЛЬНЫЕ УГЛЫ.

Начертимъ уголъ и продолжимъ его стороны за вершину; тогда у насъ образуются 4 угла (черт. 32). Стороны угла *а* служатъ продолженіемъ сторонъ угла *б*,

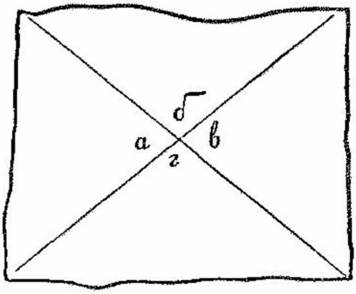
а стороны угла *в* служатъ продолженіемъ сторонъ угла *г*. Такіе углы, у которыхъ стороны одного составляютъ продолженіе сторонъ другого, называются **противоположными** или **вертикальными**.



Черт. 32

Разсмотримъ чертежъ 32. Уголъ *а* съ угломъ *в* въ суммѣ составляютъ 2 прямыхъ угла, какъ смежные; уголъ *б* съ тѣмъ же угломъ *в* въ суммѣ даютъ 2 прямыхъ. Слѣдовательно, углы *а* и *б* равны между собой. Углы *в* и *б* въ суммѣ составляютъ 2 прямыхъ угла; уголъ *г* съ тѣмъ же угломъ *б* въ суммѣ даютъ 2 прямыхъ. Слѣдовательно, уголъ *в* равенъ углу *г*.

ВЫВОДЪ. Противоположные углы равны между собой.

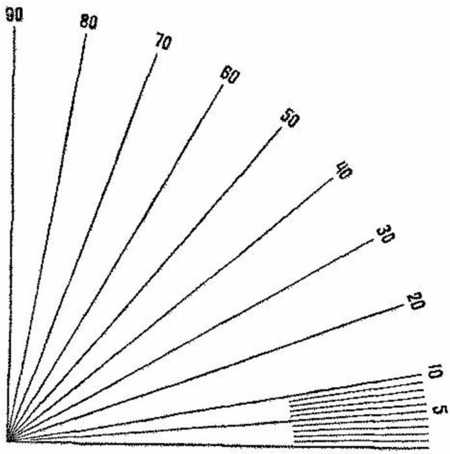


Черт. 33.

На отдѣльномъ листѣ бумаги начертить противоположные углы и обозначить ихъ буквами. Аккуратно разрѣзать бумагу по проведеннымъ линіямъ на 4 части. Наложить противоположные углы другъ на друга и провѣрить, равны ли они между собой.

X. ИЗМѢРЕНІЕ УГЛОВЪ. Чтобы измѣрить какой-нибудь уголъ, нужно сравнить его съ другимъ угломъ, принятымъ за единицу. Мы видѣли, что всѣ прямые углы равны между собой. Слѣдовательно, прямой уголъ имѣетъ постоянную, опредѣленную величину. Поэтому прямой уголъ взяли за единицу для измѣренія другихъ угловъ. Но часто нужна бываетъ мѣра меньше прямого угла,

потому что приходится измѣрять очень маленькіе углы, или при измѣреніи большого угла получается остатокъ, который прямымъ угломъ измѣрять неудобно. Чтобы устранить это неудобство, прямой уголъ раздѣлили на 90 равныхъ частей; каждую часть назвали **угловымъ градусомъ**; угловой градусъ—тоже мѣра для угловъ. Слово «градусъ» обозначается особымъ значкомъ «°», напримѣръ, уголъ въ 60 градусовъ обозначается такъ—60°.



Черт. 34.

На чертежѣ 34 изображенъ прямой уголъ съ дѣленіями на градусы.

УПРАЖНЕНІЯ.

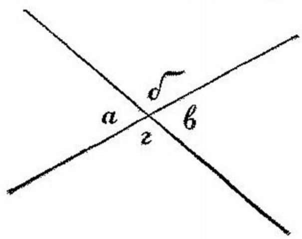
1. Уголъ равенъ $^1/_3$ прямого. Сколько градусовъ въ этомъ углѣ?

2. Уголъ равенъ $^3/_4$ прямого. Сколько въ немъ градусовъ?

3. Уголъ равенъ $1^2/_3$ прямого. Сколько въ немъ градусовъ?

4. Уголъ равенъ $1^4/_5$ прямого. Сколько въ немъ градусовъ?

5. Выразить въ частяхъ прямого слѣдующіе углы: въ 45°, въ 60°, въ 30°, въ 80°, въ 70°, въ 100°, въ 120°, въ 135°, въ 150°.

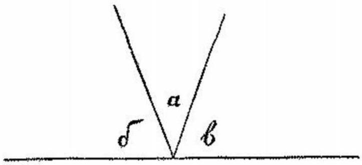


Черт 35

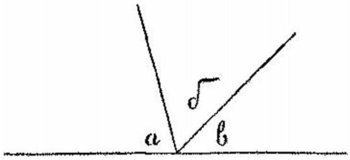
6. Начерчены двѣ прямыя пересѣкающіяся линіи. (Черт. 35). Уголъ *а* равенъ 70°. Опредѣлить величину каждаго изъ остальныхъ трехъ угловъ.

РѢШЕНІЕ. Уголъ *б* равенъ 180—70=110°, потому что съ угломъ *а*, какъ смежные, они составляютъ два прямыхъ угла. Уголъ *в* равенъ 180—110=70°, потому что съ угломъ *б*, какъ смежные, они составляютъ два прямыхъ. Уголъ *г* равенъ 180—70=110°, потому что углы *в* и *г* въ суммѣ даютъ два прямыхъ угла.

7. Допустимъ, что уголъ *а* равенъ 65°. (Черт. 35). Опредѣлить величину каждаго изъ остальныхъ трехъ угловъ.

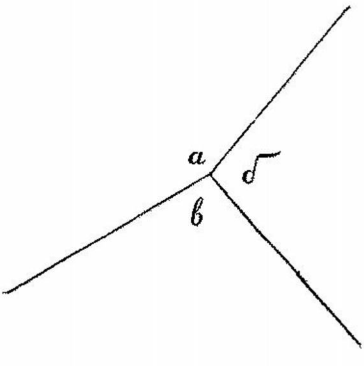


Черт. 36

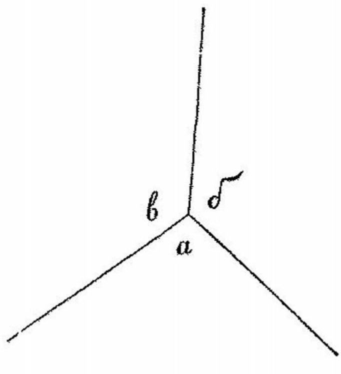


Черт. 37.

8. Одинъ изъ четырехъ угловъ, образованныхъ двумя пересѣкающимися прямыми равенъ $^1/_3$ прямого угла. Опредѣлить величину остальныхъ угловъ.



Черт 38.



Черт. 39.

9. Одинъ изъ четырехъ угловъ, образованныхъ двумя пересѣкающимися линіями, въ 3 раза меньше своего

смежнаго угла. Опредѣлить величину каждаго изъ четырехъ угловъ.

10. Уголъ *а* равенъ 40°. (Черт. 36). Опредѣлить величину угловъ *б* и *в*, если они равны между собой.

11. Уголъ *а* равенъ 75°. (Черт. 37). Опредѣлить углы *б* и *в*, если уголъ *б* больше угла *в* на 15°.

12. Уголъ *а* равенъ 160°. (Черт. 38). Опредѣлить величину угловъ *б* и *в*, если они равны между собой.

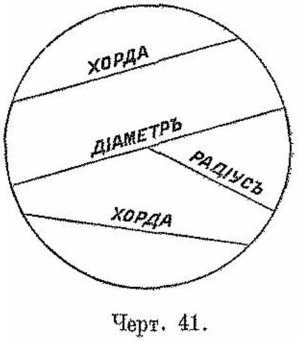
13. Уголъ *в* равенъ 140°. (Черт. 39). Уголъ *б* больше угла *а* на 20°. Опредѣлить величину угловъ *б* и *а*.

III. ОБЪ ОКРУЖНОСТИ.

I. ОПРЕДѢЛЕНІЯ. При помощи циркуля начертимъ на плоскости бумаги замкнутую кривую линію. (Черт. 40).



Черт. 40.



Черт. 41.

Всѣ точки этой кривой находятся на равномъ разстояніи отъ одной точки, называемой **центромъ.** Такая кривая линія называется **окружностью.**

Прямая линія, соединяющая центръ съ какой-нибудь точкой окружности, называется **радіусомъ.**

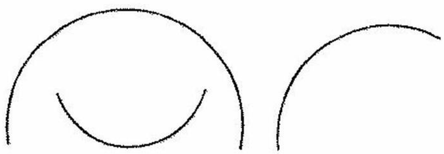
Прямая линія, соединяющая двѣ точки окружности, называется **хордой.** (Черт. 41).

Хорда, которая проходитъ черезъ центръ окружности, называется **діаметромъ**.

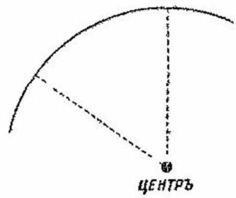
Часть окружности называется **дугою**. (Черт. 42).

УПРАЖНЕНІЯ. 1. *Начертить окружность; провести* въ ней радіусъ, хорду и діаметръ.

2. Начертить дугу и показать радіусъ и центръ этой дуги. (См. черт. 43).



Черт. 42.



Черт. 43.

3. Сколько радіусовъ можно провести отъ центра къ разнымъ точкамъ окружности?

4. Всѣ ли радіусы одной окружности равны между собой?

5. Сколько діаметровъ можно провести въ одной окружности?

6. Изъ сколькихъ радіусовъ состоитъ діаметръ?

7. Всѣ ли діаметры одной окружности равны между собой?

8. Сколько хордъ можно провести между различными точками одной окружности?

9. Сколько центровъ имѣетъ одна окружность?

10. Начертить окружность и провести въ ней діаметръ. Перегнуть чертежъ по діаметру. На какія части окружность дѣлится діаметромъ?

ВЫВОДЫ. 1. **Каждая окружность имѣетъ только одинъ центръ.**

2. **Въ окружности можно провести безчисленное множество радіусовъ, діаметровъ и хордъ.**

3. **Всѣ радіусы одной окружности равны между собой.**

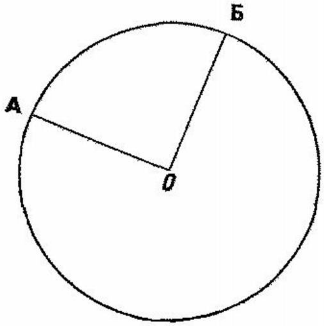
4. **Всѣ діаметры одной окружности равны между собой.**

5. **Діаметръ дѣлитъ окружность пополамъ.**

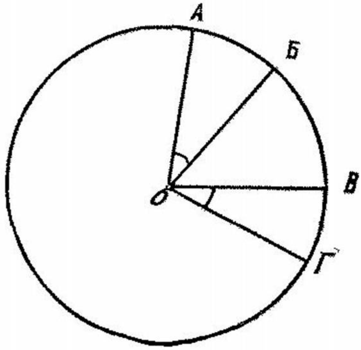
На двухъ листахъ бумаги однимъ и тѣмъ же радіусомъ начертимъ по окружности. Затѣмъ передъ свѣтомъ наложимъ одинъ листъ на другой такъ, чтобы центры окружностей совпали. Тогда увидимъ, что всѣ точки одной окружности упадутъ на другую. Слѣдовательно, **окружности равны между собой, если равны ихъ радіусы.**

II. ЦЕНТРАЛЬНЫЙ УГОЛЪ. Уголъ, вершина котораго находится въ центрѣ окружности, называется **центральнымъ** угломъ. Такъ уголъ *АОБ* (черт. 44) есть центральный.

Вырѣжемъ изъ плотной бумаги модель угла. Затѣмъ



Черт. 44.



Черт. 45.

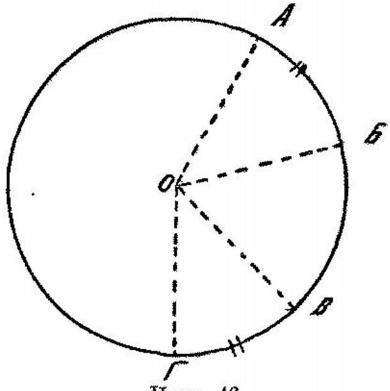
начертимъ окружность, въ которой при помощи модели построимъ (начертимъ) два равныхъ центральныхъ угла. (Черт. 45). Передъ свѣтомъ перегнемъ чертежъ такъ, чтобы сторона *ОБ* совмѣстилась съ стороною *ОВ*. Тогда сторона *ОГ* пойдетъ по сторонѣ *ОА*, потому что углы *АОБ* и *ВОГ* равны между собой. Точка *В* упадетъ въ точку *Б*, а точка *Г* упадетъ въ точку *А*, такъ какъ радіусы одной окружности равны между собой. Дуга *АБ* совмѣстится съ дугой *ВГ* на всемъ протяженіи, потому что точки,

какъ одной дуги, такъ и другой, находятся на одинаковомъ разстоянiи отъ центра. Дуги, которыя при наложенiи совмѣщаются, называются **равными.**

ВЫВОДЪ. Если въ окружности центральные углы равны между собой, то равны и соотвѣтствующiя имъ дуги.

Примѣнивъ то же разсужденiе и въ томъ случаѣ, когда равные центральные углы даны въ двухъ равныхъ окружностяхъ, также найдемъ, что, если центральные углы равны, то и соотвѣтствующiя имъ дуги равны.

Обратное предложенiе. Допустимъ, что уже начерчена *окружность*, на ней *отложены двѣ равныя дуги*, и концы дугъ соединены прямыми линiями съ центромъ. (Черт. 46). Перегнемъ чертежъ такъ, чтобы равныя дуги совмѣстились; точка *В* упала въ точку *Б*, а точка *Г* упала въ точку *А*. Тогда увидимъ, что прямая *ОГ* на всемъ протяженiи совмѣстится съ прямой *АО*, такъ какъ между двумя точками можно провести только одну прямую линiю; а линiя *ОВ* на всемъ протяженiи совмѣстится съ прямой *ОБ*. Слѣдовательно, вершины и стороны центральныхъ угловъ при наложенiи совмѣщаются; мы знаемъ, что такiе углы называются равными.



Черт. 46.

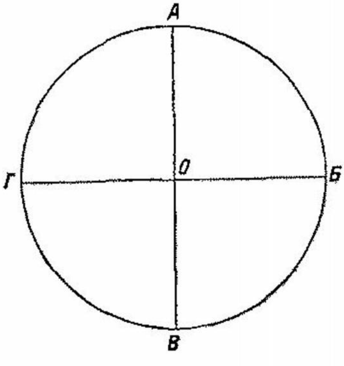
ВЫВОДЪ. Если двѣ дуги одной и той же окружности равны между собой, то равны и соотвѣтствующiе имъ центральные углы.

Примѣнивъ то же разсужденiе и въ томъ случаѣ, когда равныя дуги даны на двухъ равныхъ окружностяхъ, мы тоже убѣдимся, что, если дуги равны, то равны и соотвѣтствующiе имъ центральные углы.

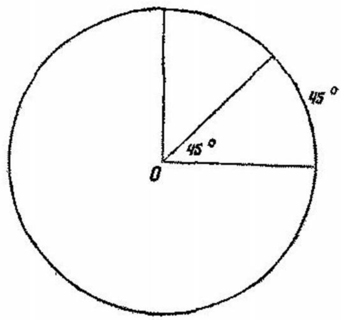
ЗАМѢЧАНІЕ. Всякій уголъ можно сдѣлать центральнымъ, если какимъ-нибудь радіусомъ изъ вершины его описать дугу.

III. ТРАНСПОРТИРЪ. Если окружность раздѣлить на 360 равныхъ частей, то получатся дуги, которыя называются **дуговыми градусами.** Слѣдовательно, дуговой градусъ есть $^1/_{360}$ окружности.

Начертимъ окружность, проведемъ въ ней два перпендикулярныхъ другъ къ другу діаметра. (Черт. 47). Тогда вокругъ центра расположатся 4 прямыхъ угла: *АОБ*, БОВ, ВОГ и ГОА. Мы знаемъ: 1) что **всѣ прямые углы равны между собой,** и 2) что **равнымъ центральнымъ угламъ въ одной и той же окружности соотвѣтствуютъ равныя дуги.** Слѣдовательно, дуги *АБ*, *БВ*, *ВГ* и *ГА* равны между собой; каждая изъ нихъ равна $^1/_4$ окружности, или 90 дуговымъ градусамъ, а каждый изъ пря-



Черт. 47.



Черт 48

мыхъ угловъ имѣетъ 90 угловыхъ градусовъ. Если возьмемъ уголъ, равный половинѣ прямого, то онъ будетъ имѣть 45 угловыхъ градусовъ; но и дуга, на которую опираются стороны этого угла, имѣетъ тоже 45 дуговыхъ градусовъ. (Черт 48). Если возьмемъ уголъ, равный $^1/_3$ прямого, т. е. въ 30°, то и дуга, соотвѣтствующая этому

углу, будетъ имѣть тоже 30°. Вообще, **уголъ заключаетъ въ себѣ столько угловыхъ градусовъ, сколько градусовъ дуговыхъ заключается въ дугѣ, описанной изъ вершины этого угла и лежащей между его сторонами.**

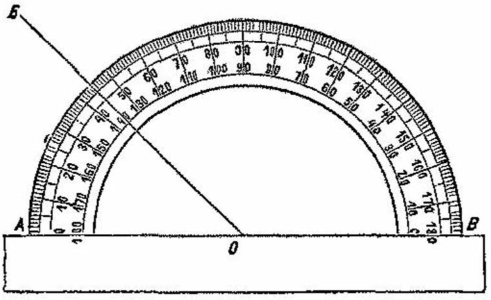
УПРАЖНЕНІЯ. 1. Сколько градусовъ имѣетъ уголъ, если дуга, описанная изъ его вершины и заключающаяся между его сторонами, составляетъ $^1/_3$ окружности?

2. Сколько градусовъ имѣетъ уголъ, если дуга, описанная изъ его вершины и заключающаяся между его сторонами, составляетъ $^1/_5$ окружности?—$^1/_6$ окружности?—$^1/_8$ окружности?—$^1/_9$ окружности?

3. Равны ли между собою угловые градусы разныхъ угловъ?

4. Равны ли между собою дуговые градусы разныхъ дугъ и окружностей?

На основаніи того, что уголъ имѣетъ столько градусовъ угловыхъ, сколько дуговыхъ градусовъ *заключается* въ дугѣ, описанной изъ вершины этого угла и лежащей между его сторонами, устроенъ приборъ для измѣренія и черченія угловъ. Этотъ приборъ называется **транспор-**

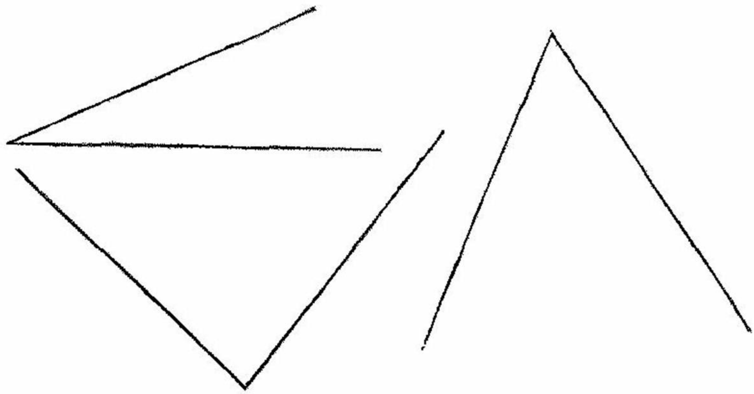


Черт 49

тиромъ. На чертежѣ 49 показано, какъ нужно прикладывать транспортиръ при измѣреніи угловъ. Въ данномъ случаѣ по транспортиру видно, что уголъ $AOБ$ равенъ

45°, потому что дуга, заключенная между его сторонами и описанная изъ его вершины, равна 45°.

УПРАЖНЕНІЯ. 1. При помощи транспортира измѣрить углы, изображенные на чертежѣ 50.

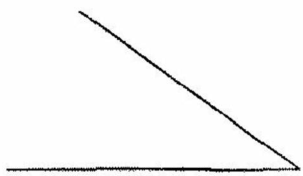


Черт. 50.

2. При помощи транспортира начертить углы, равные тѣмъ, которые изображены на чертежѣ 50.

3. Начертить два угла; потомъ при помощи транспортира начертить третій уголъ, равный суммѣ двухъ первыхъ.

4. Начертить два неравныхъ угла; потомъ при помощи транспортира начертить третій уголъ, равный разности двухъ первыхъ.



Черт. 51.

5. Начертить углы въ 2 и въ 3 раза больше того, который данъ на чертежѣ 51.

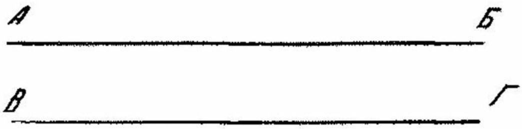
6. Начертить углы въ 2 и въ 3 раза меньше того, который данъ на чертежѣ 51.

ПРИМѢЧАНІЕ. Градусъ окружности дѣлится на 60 равныхъ частей, называемыхъ **минутами**, а минута дѣлится

на 60 частей, называемыхъ **секундами**. Минута обозначается знакомъ ′, а секунда знакомъ ″. Угловой градусъ тоже дѣлится на 60 минутъ, а минута дѣлится на 60 секундъ.

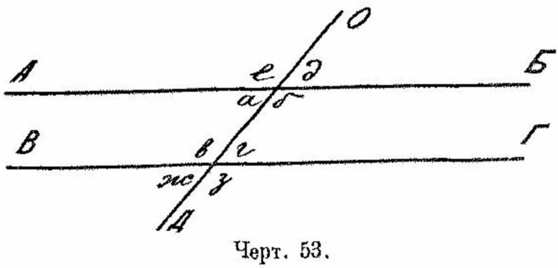
IV. О ПАРАЛЛЕЛЬНЫХЪ ЛИНІЯХЪ.

Мы знаемъ, что двѣ прямыя линіи могутъ лежать на одной плоскости и пересѣкаться; въ такомъ случаѣ онѣ образуютъ уголъ. Но можетъ быть и такое положеніе прямыхъ, когда онѣ лежатъ на одной плоскости и не пересѣкаются, сколько бы мы ихъ ни продолжали. Прямыя линіи, которыя лежатъ въ одной плоскости и при продолженіи въ обѣ стороны не пересѣкаются, называются **параллельными**. Такъ *АБ* параллельна *ВГ*. (Черт. 52).



Черт. 52.

Начертимъ двѣ прямыя *АБ* и *ВГ* и пересѣчемъ ихъ третьей прямой *ОД*. (Черт. 53). У насъ образовалось 8 уг-



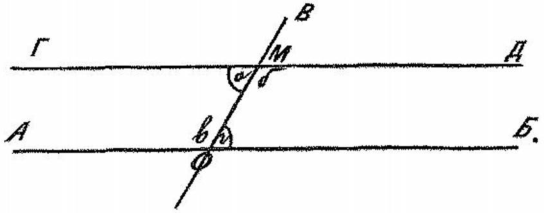
Черт. 53.

ловъ; обозначимъ ихъ малыми буквами. Углы *а* и *г* называются **внутренними накрестъ лежащими**; углы *б* и *в*

будутъ тоже внутреннія накрестъ лежащія. Углы *д* и *г*, *е* и *в*, *а* и *ж*, *б* и *з* называются **соотвѣтственными.**

На чертежѣ 53 указать внутреннія односторонніе углы; указать внѣшніе односторонніе углы.

При помощи транспортира и линейки начертимъ двѣ прямыя такъ, чтобы съ третьей прямой онѣ образовали равные внутреннія накрестъ лежащія углы. (Черт. 54).

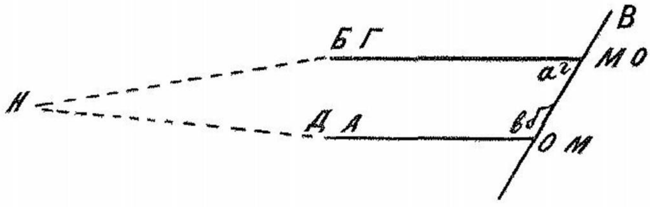


Черт. 54.

Разсмотримъ полученный чертежъ:

1) Уголъ *а* съ угломъ *б* въ суммѣ составляютъ 2 прямыхъ угла, потому что они смежные. Уголъ *г* съ угломъ *в* тоже въ суммѣ даютъ два прямыхъ угла, какъ смежные. Углы *а* и *г* равны между собой, потому что мы ихъ такъ строили. Слѣдовательно, уголъ *в* равенъ углу *б*.

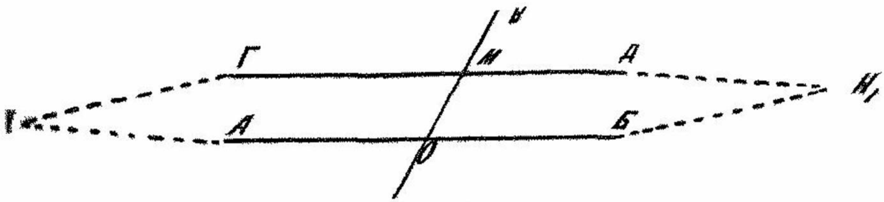
2) Разрѣжемъ чертежъ по прямой *ВО* и наложимъ правую часть на лѣвую такъ, чтобы уголъ *а* совмѣстился съ угломъ *г*, а уголъ *в* совмѣстился съ угломъ *б*. (Черт. 55).



Черт. 55.

Тогда увидимъ, что линія *ОБ* пойдетъ по линіи *МГ*, а линія *МД* пойдетъ по линіи *ОА*. Допустимъ, что эти прямыя гдѣ-нибудь на своемъ продолженіи пересѣкутся, напри-

мѣръ, въ точкѣ *Н*. Въ такомъ случаѣ, приведя чертежъ въ первоначальное положеніе, мы точку пересѣченія должны перенести и въ правую сторону. (Черт. 56). Тогда получится, что между двумя точками *Н* и $Н_1$ можно провести



Черт. 56

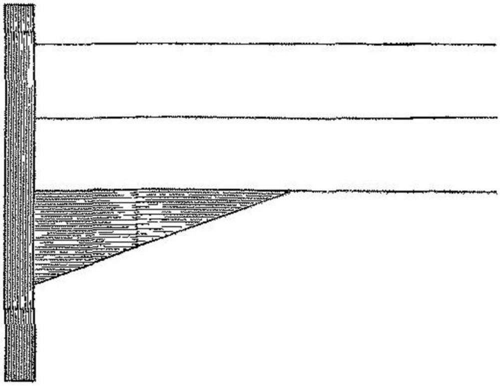
двѣ прямыя линіи. А мы знаемъ, что между двумя точками можно провести только одну прямую. Слѣдовательно, прямыя *АБ* и *ГД* нигдѣ на своемъ продолженіи не должны пересѣчься.

ВЫВОДЪ. Если внутренніе накрестъ лежащіе углы равны между собой, то линіи параллельны.

Уголъ *а* равенъ углу *м*, потому что они противоположные. (Черт. 54). Уголъ *а* равенъ углу *г*, потому что мы ихъ такъ чертили. Слѣдовательно, если внутренніе накрестъ лежащіе углы равны между собой, то равны между собой и углы соотвѣтственные; и наоборотъ: если соотвѣтственные углы равны, то равны между собой и внутренніе накрестъ лежащіе. Зная это, мы можемъ сдѣлать такой **ВЫВОДЪ. Если соотвѣтственные углы равны между собой, то линіи параллельны.**

ЗАМѢЧАНІЕ. Если линіи лежатъ въ разныхъ плоскостяхъ, то онѣ могутъ быть непараллельными, хотя и не пересѣкутся другъ съ другомъ. Напримѣръ, если одну линію проведемъ по полу комнаты съ сѣвера на югъ, а другую—по потолку съ востока на западъ, то эти линіи, хотя и не пересѣкутся другъ съ другомъ, не будутъ называться параллельными, потому что онѣ лежатъ въ разныхъ плоскостяхъ.

УПРАЖНЕНІЯ. 1. Передвигая наугольникъ по краю неподвижно лежащей линейки, начертить нѣсколько параллельныхъ линій. (См. чер. 57). Почему начерченныя такимъ способомъ линіи параллельны?



Черт 57.

2. Указать на окружающихъ предметахъ параллельныя линіи.

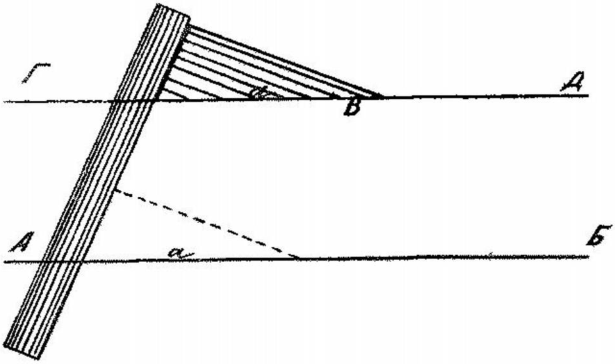
3. На стѣнахъ и потолкѣ комнаты указать такія прямыя линіи, которыя не пересѣкаются, но которыя и непараллельны.

4. Параллельны ли между собою линіи, которыя перпендикулярны къ одной и той же прямой?

5. Черезъ точку, взятую внѣ прямой, при помощи наугольника и линейки провести линію, параллельную данной прямой.

РѢШЕНІЕ. Возьмемъ прямую *АБ* и внѣ ея точку *В*. Приложимъ наугольникъ одной стороной къ линіи *АБ*, а къ другой сторонѣ наугольника приложимъ линейку. (Черт. 58). Будемъ передвигать наугольникъ по краю линейки до тѣхъ поръ, пока точка *В* не окажется на сторонѣ наугольника *a*. Затѣмъ по сторонѣ *a* черезъ точку *В*

проводимъ прямую *ГД*. Линіи *АБ* и *ГД* параллельны, такъ какъ имѣютъ равные соотвѣтственные углы.

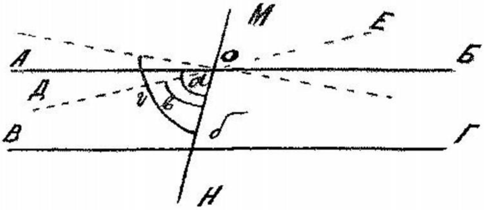


Черт. 58.

6. Взять прямую линію и внѣ ея двѣ точки: одну точку по одну сторону прямой, а другую по другую сторону прямой. Черезъ эти точки при помощи наугольника и линейки провести двѣ линіи, параллельныя взятой прямой.

ВЫВОДЪ. Изъ способа черченія параллельныхъ линій можно сдѣлать слѣдующій выводъ: **къ каждой прямой черезъ точку, взятую внѣ ея, можно провести только одну параллельную прямую.**

ОБРАТНЫЯ ПРЕДЛОЖЕНІЯ. Даны двѣ параллельныя линіи *АБ* и *ВГ*, которыя пересѣчены третьей прямой *МН*. (Черт. 59).



Черт 59

Изслѣдуемъ, равны ли между собой внутренніе накрестъ лежащіе углы *а* и *б*.

1) Допустимъ, что уголъ *а* больше угла *б*; въ такомъ случаѣ возьмемъ отъ угла *а* часть *в*, которая равнялась бы

углу *б*, и проведемъ прямую *ДЕ*. Прямая *ДЕ* должна быть параллельна линіи *ВГ*, потому что теперь внутренніе накрестъ лежащіе углы *в* и *б* равны. Но этого быть не можетъ, такъ какъ при такомъ допущеніи черезъ точку О проходятъ двѣ прямыя *АБ* и *ДЕ*, параллельныя одной линіи *ВГ*, а мы знаемъ, что черезъ точку, лежащую внѣ прямой можно провести только одну параллельную данной. Слѣдовательно, уголъ *а* не можетъ быть больше угла *б*.

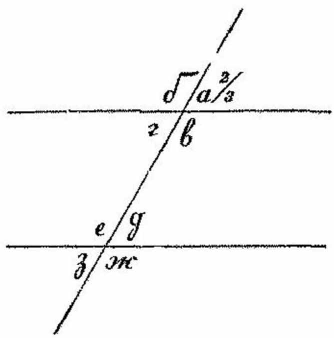
2. Допустимъ, что уголъ *а* меньше угла *б*; тогда, отложивъ при точкѣ *О* уголъ *г*, равный углу *б*, мы опять получимъ, что черезъ одну точку проведены двѣ линіи, параллельныя третьей. Слѣдовательно, уголъ *а* не можетъ быть и меньше угла *б*.

Итакъ, уголъ *а* не больше и не меньше угла *б*,—значитъ, эти углы равны между собой.

ВЫВОДЪ. Если линіи параллельны, то внутренніе накрестъ лежащіе углы равны между собой.

Уголъ МОБ (черт. 59). равенъ углу *а*, потому что эти углы вертикальные; уголъ *б* тоже равенъ углу *а*, какъ внутренніе накрестъ лежащіе при параллельныхъ линіяхъ. Слѣдовательно, уголъ *МОБ* равенъ углу *б*.

ВЫВОДЪ. Если линіи параллельны, то соотвѣтственные углы равны между собой.



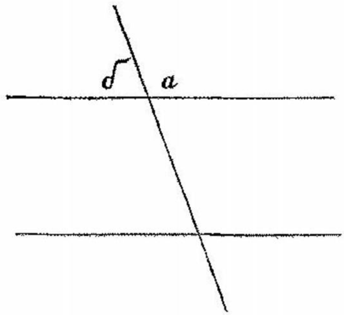
Черт. 60.

УПРАЖНЕНІЯ. 1. Начерчены двѣ параллельныя линіи и пересѣчены третьей линіей такъ, что одинъ изъ восьми образовавшихся угловъ равенъ $^2/_3$ прямого угла. Опредѣлить величину остальныхъ семи угловъ. (Черт. 60).

Рѣшеніе. Дано, что уголъ *а* равенъ $^2/_3$ прямого; тогда уголъ *б* будетъ равенъ $2-{}^2/_3=1^1/_3$ прямого, потому что

эти углы смежные. Уголъ *в* равенъ углу *б*, потому что они противоположные или вертикальные; точно также уголъ *г* равенъ углу *а*. Уголъ *а* равенъ углу *д*, какъ соотвѣтственные. Уголъ *б* равенъ углу *е*; уголъ *д* равенъ углу *з*, а уголъ *е* равенъ *ж*.

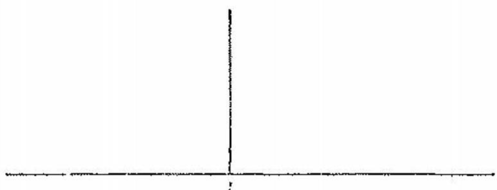
2. Начерчены двѣ параллельныя прямыя и пересѣчены третьей линіей такъ, что уголъ *а* больше угла *б* на 40°. 1) Опредѣлить въ градусахъ величину каждаго изъ 8 образовавшихся угловъ. (Черт. 61). 2) Опредѣлить сумму внутреннихъ одностороннихъ угловъ.



Черт. 61.

ВЫВОДЪ. Если линіи параллельны, то сумма внутреннихъ одностороннихъ угловъ равна 2 прямымъ угламъ, и сумма внѣшнихъ одностороннихъ угловъ равна 2 прямымъ.

3. Начертить двѣ параллельныя линіи и провести къ одной изъ нихъ перпендикуляръ. (Черт. 62). Продолжить перпендикуляръ до пересѣченія съ другой параллельной и доказать, что **перпендикуляръ къ одной изъ параллельныхъ служитъ перпендикуляромъ и къ другой.**


Черт. 62.

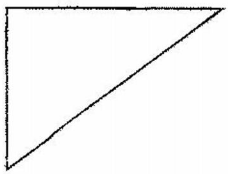
4. Начертить двѣ параллельныя линіи на разстояніи 2 сантим. другъ отъ друга. **Разстояніе отъ одной параллельной линіи до другой измѣряется по линіи, перпендикулярной къ этимъ параллельнымъ.**

5. Начертить 3 параллельныхъ линій на разстояніи 2 сантим. другъ отъ друга такъ, чтобы первая линія была длиною въ 5 сантим., вторая—въ 6 сантим., третья—въ 7 сантим.

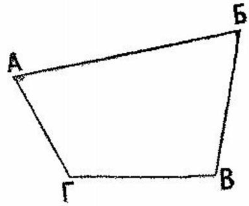
6. Начертить прямую линію въ 8 сантим. и по обѣ стороны отъ нея начертить еще по одной параллельной къ ней: одну на разстояніи 2 сантим. длиною въ 7 сантим., а другую на разстояніи 1 сантим. и длиною въ 9 сантим.

V. МНОГОУГОЛЬНИКИ.

I. ПОНЯТІЕ О МНОГОУГОЛЬНИКѢ. УПРАЖНЕНІЯ. 1. Возьмемъ на плоскости бумаги три точки, не лежащія на одной прямой; соединимъ эти точки между собою прямыми. Тогда часть плоскости бумаги мы ограничимъ со всѣхъ сторонъ тремя прямыми линіями. (Черт. 63).



Черт. 63.



Черт 64.

2. Возьмемъ на плоскости бумаги 4 точки: *А*, *Б*, *В* и *Г*. (Черт. 64). Соединимъ эти точки между собою прямыми, какъ показано на чертежѣ 64.

3. Ограничить часть плоскости бумаги 5 прямыми линіями, 6 прямыми, 7 прямыми.

Часть плоскости, ограниченная со всѣхъ сторонъ прямыми линіями, называется **многоугольникомъ.** Линіи, ограничивающія многоугольникъ называются его **сторо-**

нами, а точки пересѣченія сторонъ называются **вершинами** многоугольника. Сумма всѣхъ сторонъ многоугольника называется его **периметромъ**.

Каждый многоугольникъ имѣетъ столько угловъ, сколько у него сторонъ. Многоугольникъ, ограниченный тремя сторонами, называется **треугольникомъ**; многоугольникъ, ограниченный 4 сторонами, называется **четыреугольникомъ**. Многоугольникъ, имѣющій 5 сторонъ и угловъ, называется **пятиугольникомъ**; многоугольникъ о шести углахъ называется шестиугольникомъ и т. д.

II. ДІАГОНАЛИ МНОГОУГОЛЬНИКА. Начертимъ многоугольникъ. (Черт. 65).



Черт 65.

Двѣ вершины этого многоугольника, не прилежащія къ одной сторонѣ, соединимъ прямой линіей. Прямая, соединяющая двѣ вершины, не прилежащія къ одной сторонѣ, называется **діагональю** многоугольника.

УПРАЖНЕНІЯ. 1. Начертить четыреугольникъ и провести въ немъ діагонали.

2. Сколько діагоналей можно провести изъ одной вершины четыреугольника?

3. Сколько діагоналей можно провести изъ одной вершины пятиугольника, шестиугольника, семиугольника?

4. На сколько треугольниковъ діагональю дѣлится четыреугольникъ?

5. На сколько треугольниковъ дѣлится пятиугольникъ діагоналями, проведенными изъ одной вершины?

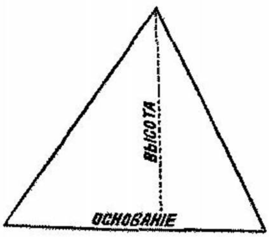
6. На сколько треугольниковъ дѣлится семиугольникъ діагоналями, проведенными изъ одной вершины?

7. На сколько треугольниковъ дѣлится двѣнадцатиугольникъ діагоналями, проведенными изъ одной вершины?

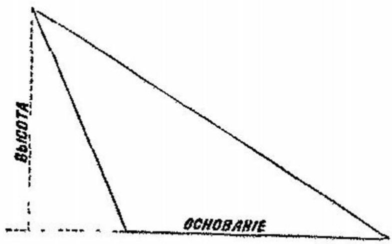
ВЫВОДЪ. 1. **Въ многоугольникѣ можно изъ одной вершины провести столько діагоналей, сколько многоугольникъ имѣетъ сторонъ безъ трехъ.**

2. **Діагоналями, проведенными изъ одной вершины, многоугольникъ дѣлится на столько треугольниковъ, сколько въ немъ сторонъ безъ двухъ.**

III. ТРЕУГОЛЬНИКИ. Треугольникомъ называется часть плоскости, ограниченная тремя пересѣкающимися прямыми. Одна изъ сторонъ треугольника принимается за **основаніе**; перпендикуляръ, опущенный изъ вершины противоположнаго угла на основаніе или на продолженіе основанія, называется **высотой** треуголь-



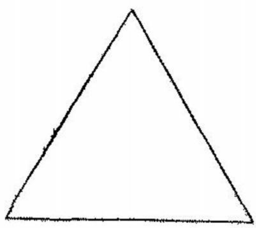
Черт. 66.



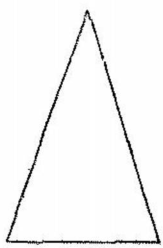
Черт. 67.

ника. (Чертежи 66 и 67). Вершина угла, лежащаго противъ основанія, называется **вершиной** треугольника.

IV. ВИДЫ ТРЕУГОЛЬНИКОВЪ. 1. Треугольникъ,



Черт. 68.



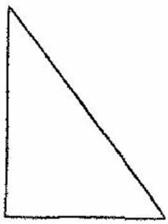
Черт. 69.

у котораго всѣ стороны равны между собой, называется **равностороннимъ.** (Черт. 68).

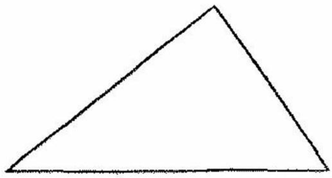
2. Треугольникъ, у котораго двѣ стороны равны между собой, называется **равнобедреннымъ.** Въ равнобедренномъ треугольникѣ за основанiе принимается неравная сторона. (Черт. 69).

3. Треугольникъ, у котораго всѣ стороны разной длины, называется **разностороннимъ.** (Черт. 70).

4. Треугольникъ, у котораго всѣ углы острые, называется **остроугольнымъ.** (Черт. 69).



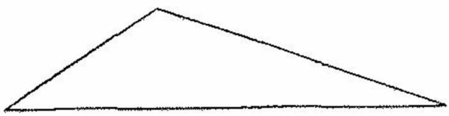
Черт. 70.



Черт. 71.

5. Треугольникъ, имѣющiй прямой уголъ, называется **прямоугольнымъ.** (Черт. 70 и 71). Сторона прямоугольнаго треугольника, лежащая противъ прямого угла, называется **гипотенузою**; стороны же, образующiя прямой уголъ, называется **катетами** прямоугольнаго треугольника.

6. Треугольникъ, имѣющiй тупой уголъ, называется **тупоугольнымъ.** (Черт. 72).



Черт. 72.

Такъ какъ прямая линiя есть кратчайшее разстоянiе между двумя точками, то **одна сторона всякаго треугольника меньше суммы двухъ другихъ его сторонъ.**

УПРАЖНЕНIЯ. 1. На глазъ начертить треугольники: 1) равностороннiй, 2) равнобедренный, 3) разностороннiй, 4) остроугольный, 5) тупоугольный, 6) прямоугольный.

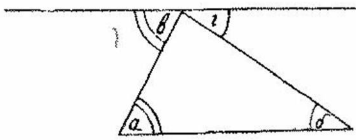
2. На глазъ начертить равнобедренный прямоугольный треугольникъ.

3. Начертить равнобедренный тупоугольный треугольникъ.

4. Можетъ ли треугольникъ имѣть одну сторону въ 5 сант., другую въ 3 сант., а третью въ 2 сант.?

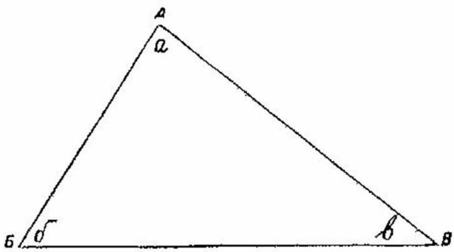
5. Можетъ ли треугольникъ имѣть одну сторону въ 10 дм., другую въ 4 дм., а третью въ 5 дм.?

V. СУММА ВНУТРЕННИХЪ УГЛОВЪ ТРЕУГОЛЬНИКА. Начертимъ треугольникъ; черезъ вершину этого треугольника проведемъ прямую линію параллельно основанію. (Черт. 73). Тогда у вершины треугольника по одну сторону прямой расположатся три угла;



Черт. 73.

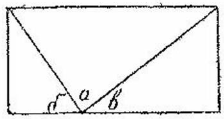
уголъ *b* равенъ углу *a*, потому что это углы внутренніе накрестъ лежащіе между параллельными прямыми, на томъ же основаніи и уголъ *г* равенъ углу *б*. Мы знаемъ, что сумма угловъ, имѣющихъ общую вершину и расположенныхъ по одну сторону прямой линіи, равна 2 прямымъ угламъ. Слѣдовательно, **сумма внутреннихъ угловъ треугольника равна двумъ прямымъ угламъ.**



Черт 74.

Что сумма внутреннихъ угловъ треугольника равна двумъ прямымъ угламъ, можно показать на слѣдующемъ опытѣ. Вырѣжемъ изъ бумаги треугольникъ *АБВ* (Чер. 74). Раздѣлимъ сторону *АБ* пополамъ; перегнемъ треуголь-

никъ такъ, чтобы перегибъ проходилъ черезъ средину стороны *АБ*, а вершина треугольника *А* упала на сторону *БВ*. Приведемъ въ точку *А* и вершины *Б* и *В* (смотри чертежъ 75), тогда увидимъ, что всѣ углы треугольника расположатся по одну сторону прямой линiи и въ суммѣ составятъ два прямыхъ угла.



Черт 75.

УПРАЖНЕНIЯ. 1. Чему равна сумма острыхъ угловъ въ прямоугольномъ треугольникѣ?

2. Одинъ изъ угловъ треугольника равенъ $^1/_2$ прямого, а другой $^2/_3$ прямого. Опредѣлить третiй уголъ треугольника.

3. Одинъ изъ острыхъ угловъ прямоугольнаго треугольника равенъ $^1/_3$ прямого. Опредѣлить второй острый уголъ этого треугольника.

4. Одинъ изъ острыхъ угловъ прямоугольнаго треугольника равенъ 25°. Опредѣлить второй острый уголъ этого треугольника.

5. Одинъ изъ острыхъ угловъ прямоугольнаго треугольника на 20° больше другого остраго угла. Опредѣлить величину каждаго угла даннаго треугольника.

6. Одинъ изъ острыхъ угловъ прямоугольнаго треугольника въ 3 раза больше другого остраго угла. Опредѣлить величину каждаго угла даннаго треугольника.

7. Одинъ изъ угловъ треугольника равенъ 75°, а другой больше его на 20°. Опредѣлить величину третьяго угла этого треугольника.

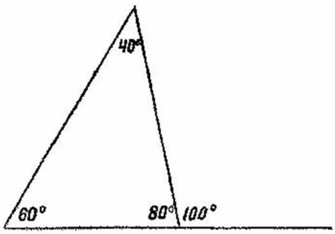
8. Одинъ изъ угловъ треугольника равенъ 80°, а второй въ 3 раза больше третьяго угла. Опредѣлить величину второго и третьяго угловъ даннаго треугольника.

9. Могутъ ли быть въ треугольникѣ два угла прямыхъ? Если не могутъ, то почему?

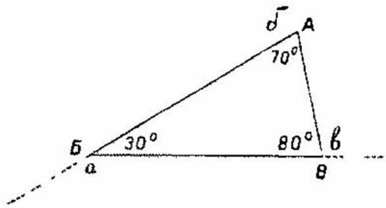
10. Могутъ ли быть въ треугольникѣ два угла тупыхъ?

ВЫВОДЪ. Въ треугольникѣ можетъ быть только одинъ прямой или тупой уголъ.

VI. ВНѢШНІЙ УГОЛЪ ТРЕУГОЛЬНИКА. УПРАЖНЕНІЯ. 1. При помощи транспортира и линейки начертимъ треугольникъ, у котораго одинъ уголъ равенъ 60°, другой 80°; тогда третій уголъ этого треугольника будетъ въ 40°. (Черт. 76). Продолжимъ одну сторону



Черг 76.



Черт 77.

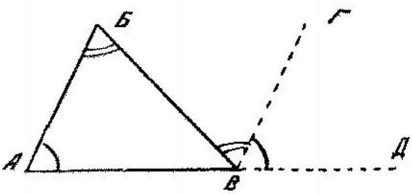
треугольника, какъ показано на чертежѣ; образуется новый уголъ, который называется внѣшнимъ угломъ треугольника. Внѣшній уголъ равенъ 100°, потому что смежный съ нимъ равенъ 80°. Сумма двухъ другихъ угловъ треугольника, несмежныхъ съ внѣшнимъ угломъ, тоже равна 100°.

2. Начертимъ треугольникъ *АБВ*, у котораго уголъ при точкѣ *А* равенъ 70°, а уголъ при точкѣ *В*—80°, тогда уголъ при точкѣ *Б* будетъ равенъ 30°. Продолжимъ стороны треугольника, какъ показано на чертежѣ 77, и образовавшіеся внѣшніе углы треугольника обозначимъ буквами *а*, *б*, *в*. Когда вычислимъ въ градусахъ величину каждаго изъ этихъ угловъ, то увидимъ, что уголъ *а*=150°, *б*=110°, *в*=100°. Но уголъ *а* равенъ суммѣ двухъ внутреннихъ угловъ треугольника—въ 70° и 80°; уголъ *б* равенъ двумъ угламъ —въ 30° и 80°; уголъ *в*=угламъ въ 70° и въ 30°.

3. Въ треугольникѣ внѣшній уголъ равенъ $1^1/_2$ прямого, а внутренніе углы, несмежные съ нимъ, равны между собой. Опредѣлить углы этого треугольника.

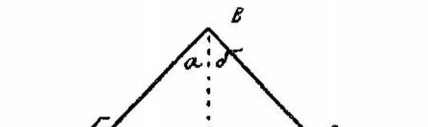
ВЫВОДЪ. Внѣшній уголъ треугольника равенъ суммѣ двухъ внутреннихъ угловъ, съ нимъ несмежныхъ.

Въ справедливости этого вывода можно убѣдиться и такимъ разсужденіемъ. Начертимъ треугольникъ и продолжимъ одну изъ его сторонъ; образуется внѣшній уголъ. (Черт. 78). Изъ точки *В* проведемъ прямую параллельно сторонѣ *АБ*. Уголъ *ГВД* равенъ углу *БАВ*, потому что эти углы соотвѣтственные при параллельныхъ *АБ* и *ГВ*; уголъ *БВГ* равенъ уг. *АБВ*, какъ внутренніе накрестъ лежащіе при тѣхъ же параллельныхъ. Слѣдовательно, внутренніе углы *А* и *Б* въ суммѣ составляютъ одинъ внѣшній уголъ БВД.



Черт 78

VII. УГЛЫ ПРИ ОСНОВАНІИ РАВНОБЕДРЕННАГО ТРЕУГОЛЬНИКА. Начертимъ прямую линію *АБ* и возьмемъ внѣ ея точку *В*. (Черт. 79). Произвольнымъ растворомъ циркуля опишемъ дугу такъ, чтобы она пересѣкла прямую *АБ*; точки пересѣченія *Г* и *Д* соединимъ прямыми съ точкой *В*. Получится треугольникъ *ГВД*, въ которомъ стороны *ВГ* и *ВД* равны между собою, какъ радіусы одной дуги. Слѣдовательно, мы начертили равнобедренный треугольникъ. При помощи транспортира



Черт. 79.

раздѣлимъ уголъ при точкѣ В пополамъ; перегнемъ чертежъ по равнодѣлящей угла *ВО*. Тогда сторона *ВД* пойдетъ по сторонѣ *ГВ*, такъ какъ углы *а* и *б* равны. Точка *Д* упадетъ въ точку *Г*, такъ какъ стороны *ВД* и *ВГ* равны между собой. Отрѣзокъ *ОД* совмѣстится съ отрѣзкомъ *ОГ*, потому что между двумя точками можно провести только одну прямую. Слѣдовательно, уголъ *Д* совмѣстится съ угломъ *Г*.

ВЫВОДЪ. Въ равнобедренномъ треугольникѣ углы при основанiи равны между собой.

Такъ какъ при перегибанiи чертежа по линiи *ВО* совмѣщаются и углы при точкѣ *О*, которые по отношенiю другъ къ другу являются смежными, то можно сдѣлать еще такой **выводъ. Прямая линiя, дѣлящая уголъ при вершинѣ равнобедреннаго треугольника пополамъ, перпендикулярна къ основанiю треугольника**; слѣдовательно, она служитъ высотой этого треугольника

Такъ какъ отрѣзки *ГО* и *ОД* при наложенiи совмѣщаются, то можно сказать, что **прямая линiя, дѣлящая уголъ при вершинѣ равнобедреннаго треугольника пополамъ, дѣлитъ основанiе треугольника пополамъ.**

УПРАЖНЕНIЯ. 1. Въ равнобедренномъ треугольникѣ уголъ при вершинѣ равенъ 80°. Опредѣлить въ градусахъ величину угловъ при основанiи.

2. Уголъ при основанiи равнобедреннаго треугольника равенъ 70°. Опредѣлить уголъ при вершинѣ.

3. Уголъ при основанiи равнобедреннаго треугольника на 30° больше угла при вершинѣ. Опредѣлить углы даннаго треугольника.

4. Уголъ при основанiи равнобедреннаго треугольника въ 2 раза больше угла при вершинѣ. Опредѣлить углы даннаго треугольника.

5. Доказать, что **всѣ углы въ равностороннемъ треугольникѣ равны между собой.**

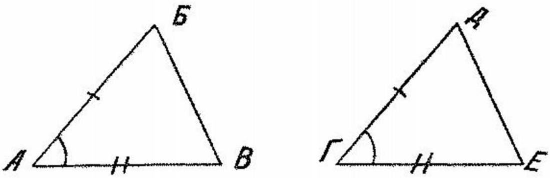
6. Сколько градусовъ въ каждомъ углѣ равносторонняго треугольника?

7. Опредѣлить въ градусахъ внутренніе углы равнобедреннаго прямоугольнаго треугольника.

8. Если продолжить основаніе равнобедреннаго треугольника, то образуется внѣшній уголъ въ 100°. Опредѣлить внутренніе углы этого треугольника.

9. Если продолжить боковую сторону равнобедреннаго треугольника за вершину треугольника, то образуется внѣшній уголъ въ $^3/_4$ прямого. Опредѣлить внутренніе углы этого треугольника.

VIII. РАВЕНСТВО ТРЕУГОЛЬНИКОВЪ. Равными называются такіе многоугольники, которые при наложеніи совмѣщаются всѣми своими частями. Разберемъ три случая равенства треугольниковъ.



Черт. 80.

I-й случай. При помощи линейки, транспортира и циркуля начертимъ на бумагѣ два треугольника такъ, чтобы сторона *АВ* равнялась сторонѣ *ГЕ*, сторона *АБ* равнялась сторонѣ *ГД*, и чтобы углы *А* и *Г* были равны между собой. (Черт. 80). Вырѣжемъ одинъ треугольникъ, напримѣръ, *ГДЕ* и наложимъ его на другой такъ, чтобы вершина *Г* упала въ *А*, а сторона *ГЕ* пошла по сторонѣ *АВ*; тогда сторона *ГД* пойдетъ по сторонѣ *АБ*, такъ какъ уголъ А равенъ углу Г. Точка Д упадетъ въ точку Б, потому что прямая АБ равна прямой ГД; точка Е упадетъ въ точку В, потому что сторона АВ равна сторонѣ ГЕ. Сторона ДЕ на всемъ протяженіи совмѣстится съ стороной БВ, потому что между двумя точками можно провести только

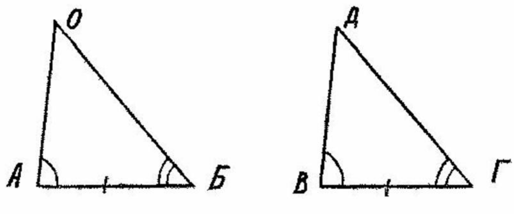
одну прямую. Слѣдовательно, треугольникъ ГДЕ всѣми своими частями совмѣстится съ треуголникомъ АБВ; такіе треугольники называются равными.

ВЫВОДЪ. Два треугольника равны, если двѣ стороны и уголъ, заключенный между ними, одного треугольника равны двумъ сторонамъ и углу между ними другого треугольника.

УПРАЖНЕНІЯ. 1. Равны ли между собою два прямоугольныхъ треугольника, у которыхъ катеты равны?

2. Даны два равнобедренныхъ треугольника, про которые извѣстно, что ихъ углы при вершинахъ равны между собой, и что боковая сторона одного треугольника равна боковой сторонѣ другого. Равны ли эти треугольники?

2-й случай. При помощи линейки, циркуля и транспортира начертимъ два треугольника такъ, чтобы они имѣли по равной сторонѣ и по два соотвѣтственно равныхъ угла, прилежащихъ къ этимъ сторонамъ. (Черт. 81).



Черт. 81.

Затѣмъ вырѣжемъ одинъ треугольникъ, например, *ВДГ* и наложимъ его на другой такъ, чтобы вершина *В* упала въ *А*, и сторона *ВГ* пошла по сторонѣ *АБ*; по равенству этихъ сторонъ вершина *Г* упадетъ въ *Б*. Такъ какъ уголъ *А* равенъ углу *В*, то сторона *ВД* пойдетъ по *АО* и точка *Д* будетъ лежать на прямой *АО*. Вслѣдствіе равенства угловъ *Б* и *Г* сторона *ГД* пойдетъ по сторонѣ *БО*, и точка *Д* будетъ лежать на прямой *ОБ*. Такимъ образомъ, точка *Д* должна лежать одновременно на прямыхъ *АО* и *БО*;

очевидно, что *Д* совпадетъ съ точкой пересѣченія прямыхъ *АО* и *ОБ*. Слѣдовательно, треугольникъ *ВДГ* всѣми своими частями при наложеніи совмѣстится съ треугольникомъ *АОБ*.

ВЫВОДЪ. Два треугольника равны, если сторона и два прилежащихъ къ ней угла въ одномъ треугольникѣ равны сторонѣ и двумъ прилежащимъ къ ней угламъ въ другомъ треугольникѣ.

УПРАЖНЕНІЯ. 1. Равны ли между собой прямоугольные треугольники, которые имѣютъ по равному катету и по равному прилежащему острому углу?

2. Равны ли между собой прямоугольные треугольники, которые имѣютъ по равному катету и по равному противолежащему острому углу?

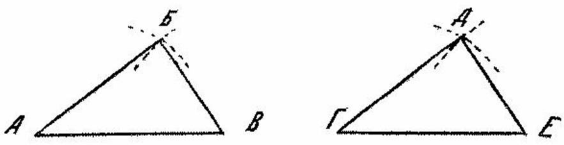
3. Равны ли между собой прямоугольные треугольники, которые имѣютъ по равной гипотенузѣ и по равному острому углу?

4. Равны ли равнобедренные треугольники, имѣющіе по равному основанію и по равному углу при основаніи?

5. Равны ли равнобедренные треугольники, у которыхъ основанія и углы при вершинѣ равны?

6. При какомъ условіи равносторонніе треугольники равны между собой?

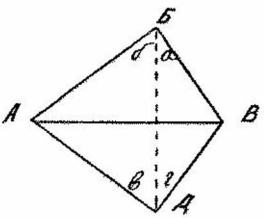
3-й случай. При помощи линейки и циркуля начер-



Черт. 82.

тимъ два треугольника такъ, чтобы стороны одного изъ нихъ порознь равнялись сторонамъ другого. (Черт. 82). Вырѣжемъ треугольникъ *ГДЕ* и приложимъ его къ треугольнику *АБВ* такъ, какъ показано на чертежѣ 83.

Соединимъ вершины *Б* и *Д* между собой прямой линіей. У насъ получатся два равнобедренныхъ треугольника *БВД* и *БАД*. Мы знаемъ, что углы при основаніи въ равнобедренномъ треугольникѣ равны между собой. Слѣдовательно, уг. *а* равенъ углу *г*, а уголъ *б* равенъ углу *в*. Если къ углу *а* прибавить *б*, а къ углу *г* прибавить уголъ *в*, то суммы получатся равныя, потому что къ равнымъ величинамъ мы прибавляемъ поровну. Такимъ образомъ, мы нашли, что весь уголъ при точкѣ *Б* равенъ всему углу при точкѣ *Д*.

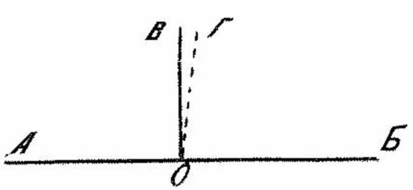


Черт. 83.

Далѣе мы можемъ сдѣлать заключеніе, что треугольники *АБВ* и *ГДЕ* равны между собой, потому что имѣютъ по двѣ соотвѣтственно равныхъ стороны и по равному углу, заключенному между этими сторонами (1-й случай равенства треугольниковъ).

ВЫВОДЪ. Два треугольника равны, если три стороны одного порознь равны тремъ сторонамъ другого.

IX. СВОЙСТВА ПЕРПЕНДИКУЛЯРА. О положеніи прямыхъ на плоскости мы знаемъ слѣдующее: 1) Двѣ прямыя линіи могутъ лежать на одной плоскости и никогда не пересѣкаться; такія линіи называются **параллельными.** 2) Двѣ прямыя могутъ пересѣкаться подъ прямымъ угломъ; такія линіи называются **перпендикулярными** другъ къ другу. 3) Двѣ прямыя могутъ пересѣкаться подъ острымъ и тупымъ углами; такія линіи называются **наклонными** другъ къ другу. Далѣе разсмотримъ слѣдующія три свойства перпендикуляра.



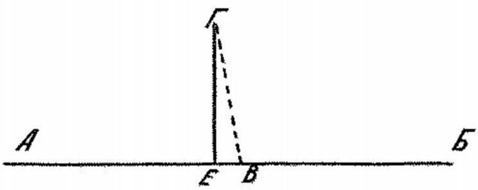
Черт. 84.

1. Дана прямая *АБ* и на ней точка *О*; изъ точки *О* проведена вторая прямая *ОВ* перпендикулярно къ линiи *АБ*. Въ такомъ случаѣ говорятъ, что изъ точки *О* **возставленъ** перпендикуляръ къ прямой *АБ*. (Черт. 84).

Допустимъ, что изъ точки *О* возставленъ второй перпендикуляръ *ОГ*; тогда углы *ВОБ* и *ГОБ*, какъ прямые, должны быть равны между собой. Но этого не можетъ быть, такъ какъ изъ чертежа видно, что уголъ *ГОБ* составляетъ только часть угла *ВОБ*, а часть всегда меньше своего цѣлаго. Слѣдовательно, съ правой стороны отъ прямой *ОВ* перпендикуляра быть не можетъ. Подобнымъ разсужденiемъ мы убѣдимся и въ томъ, что и съ лѣвой стороны отъ *ОВ* перпендикуляра не можетъ быть.

ВЫВОДЪ. Изъ точки, взятой на прямой, можно возставить къ этой прямой только одинъ перпендикуляръ.

2. Дана прямая линiя *АБ* и внѣ ея точка *Г*; изъ точки *Г* проведена прямая *ГЕ* перпендикулярно къ *АБ*. Въ такомъ случаѣ говорятъ, что изъ точки *Г* **опущенъ** на прямую перпендикуляръ. (Черт. 85).

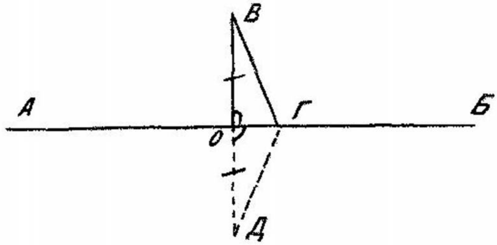


Черт. 85.

Допустимъ, что изъ точки *Г* можно опустить на прямую *АБ* второй перпендикуляръ *ГВ*. Тогда получится треугольникъ *ЕГВ* съ двумя внутренними прямыми углами *Е* и *В*. Мы знаемъ, что двухъ прямыхъ угловъ въ треугольникѣ быть не можетъ, такъ какъ сумма всѣхъ трехъ угловъ треугольника равняется только двумъ прямымъ угламъ. Слѣдовательно, изъ точки *Г* на прямую *АБ* второго перпендикуляра опустить нельзя.

ВЫВОДЪ. Изъ точки, взятой внѣ прямой можно опустить на эту прямую только одинъ перпендикуляръ.

3. Дана прямая *АБ* и внѣ ея точка *В*; изъ точки *В* опущенъ на *АБ* перпендикуляръ *ВО* и проведена наклонная *ВГ*. (Черт. 86). Продолжимъ перпендикуляръ за линію *АБ* и на продолженіи его отложимъ часть *ОД*, равную *ВО*. Соединимъ точку *Д* прямой съ точкой *Г*. Получатся два прямоугольныхъ треугольника *ВОГ* и *ОДГ*, у которыхъ катеты одного порознь равны катетамъ другого Такіе треугольники равны между собой (1-й случай равенства треугольниковъ). Прямая *ВГ* равна прямой *ДГ*. Прямая *ВД* составляетъ двойную длину перпендикуляра *ВО*, а ломаная *ВГД* есть двойная длина наклонной *ВГ*. Прямая *ВД* короче ломаной *ВГД*, проведенной между точками *В* и *Д*. Слѣдовательно, и половина прямой короче половины ломаной.



Черт. 86

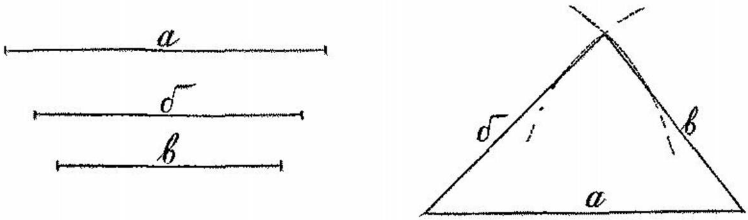
ВЫВОДЪ. Кратчайшее разстояніе отъ точки до прямой есть перпендикуляръ, опущенный изъ этой точки на прямую.

На основаніи этого свойства разстояніе отъ точки до прямой измѣряется по перпендикуляру, опущенному изъ точки на прямую; а разстояніе между параллельными линіями измѣряется по перпендикуляру къ этимъ линіямъ.

X. ПРОСТѢЙШІЯ ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНІЕ. Замѣчаніе. Приведенныя въ этомъ отдѣлѣ задачи будемъ рѣшать посредствомъ только двухъ инструментовъ· линейки и циркуля.

1. ***Построить треугольникъ по тремъ даннымъ сторонамъ.*** (Черт. 87).

Построеніе. Даны три прямыя линіи· *а*, *б* и *в*; нужно начертить такой треугольникъ, который имѣлъ бы стороны, равныя даннымъ прямымъ. Начертимъ прямую линію и отложимъ на ней часть, равную прямой *а*; изъ



Черт 87

концовъ отложенной части опишемъ двѣ дуги: одну радіусомъ *б*, а другую радіусомъ *в*. Точку пересѣченія дугъ соединимъ съ концами отрѣзка *а*. Получится треугольникъ, стороны котораго равны даннымъ прямымъ: *а*, *б* и *в*.

Вопросы. 1. Можно ли начертить такой треугольникъ, у котораго одна сторона 5 сантим., другая 3 сантим. и третья 2 сантим.?

2. Можетъ ли треугольникъ имѣть одну сторону въ 10 дюймовъ, другую въ 4 дюйма, а третью въ 5 дюймовъ?

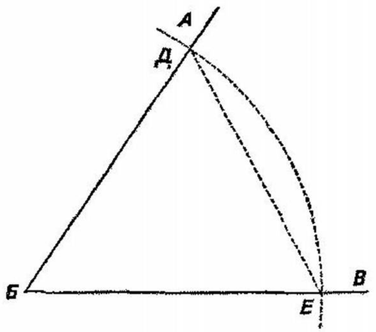
3. Можетъ ли треугольникъ имѣть всѣ три стороны по 10 сантим.?

2. **Построить уголъ, равный данному углу.** (Черт. 88).

Построеніе. Данъ уголъ *АБВ*; нужно начертить другой уголъ, равныи углу *АБВ*. Чертимъ прямую *ОГ*; беремъ циркуль и изъ вершины угла *АБВ* описываемъ дугу; потомъ тѣмъ же радіусомъ описываемъ дугу изъ точки *О* прямой *ОГ* Беремъ на циркуль хорду *ДЕ* и переносимъ ее на другой чертежъ; получимъ точку *М*, которую соединяемъ съ точкой *О*. Уголъ *АБВ* равенъ углу *МОГ*.

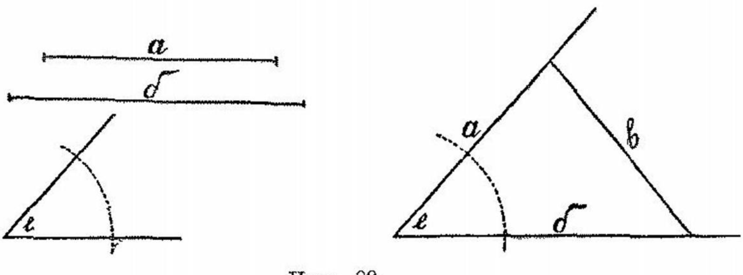
Доказательство. Треугольникъ *ДБЕ* равенъ треугольнику *МОГ*, потому что три стороны одного треугольника

порознь равны тремъ сторонамъ другого. (Указать соотвѣтственныя стороны.) При наложенiи треугольниковъ уголъ *МОГ* совмѣстится съ угломъ *ДБЕ*.



Черт. 88.

3. **Построить треугольникъ по двумъ сторонамъ и углу, заключенному *между этими сторонами*.** (*Черт. 89*).

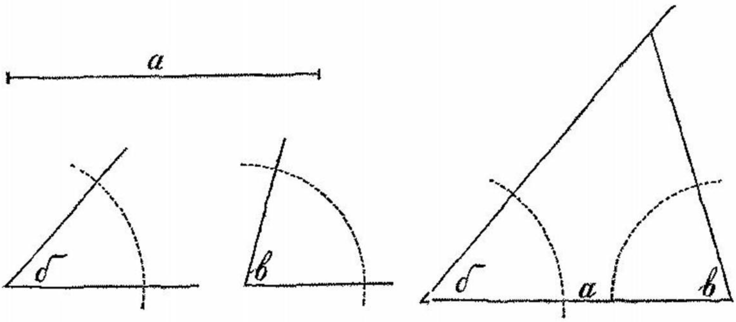


Черт. 89.

Построенiе. Начертимъ уголъ, равный данному углу *е*. На сторонахъ начерченнаго угла отъ его вершины отложимъ отрѣзки, равные даннымъ прямымъ *а* и *б*; полученныя точки на сторонахъ угла соединимъ прямой линiей *в*.

4. **Построить треугольникъ по сторонѣ и двумъ прилежащимъ къ ней угламъ.** (Черт. 90).

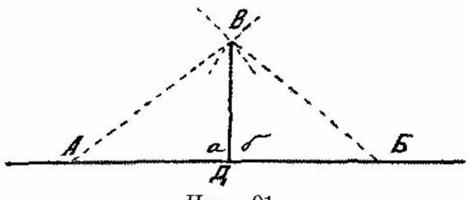
Построеніе. Начертимъ прямую линію; отложимъ на ней отрѣзокъ, равный линіи *а*. При концахъ этого отрѣзка чертимъ два данныхъ угла *б* и *в*. Продолжимъ стороны начерченныхъ угловъ до ихъ пересѣченія.



Черт. 90.

5. **Изъ точки, взятой на прямой, возставить къ ней перпендикуляръ.** (Черт. 91).

Построеніе. Дана прямая линія и на ней точка *Д*; требуется къ прямой изъ точки *Д* возставить перпендикуляръ. По обѣ стороны отъ точки *Д* откладываемъ равные отрѣзки *АД* и *БД*. Изъ точекъ *А* и *Б* описываемъ дуги однимъ радіусомъ такъ, чтобы онѣ пересѣклись. Точку пересѣченія дугъ соединяемъ прямой съ точкой *Д*. Линія *ВД* перпендикулярна къ данной прямой, т.-е. углы *АДВ* и *ВДБ* прямые.

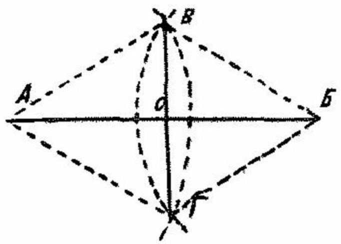


Черт. 91.

Доказательство. Соединимъ точку *В* прямыми линіями съ точками *А* и *Б*. Получатся треугольники *АВД* и *ВДБ*. Эти треугольники равны между собой, потому что сторона

ВД у нихъ общая, стороны *АД* и *ДБ* равны между собой; стороны *АВ* и *ВБ* тоже равны, такъ какъ дуги описаны однимъ радіусомъ. Слѣдовательно, три стороны одного треугольника порознь равны тремъ сторонамъ другого. Если чертежъ перегнемъ по линіи *ВД*, то углы *а* и *б* совмѣстятся, потому что самые треугольники совмѣстятся. Углы *а* и *б* смежные и равны между собой; слѣдовательно, они прямые, а линіи *ВД* и *АБ* перпендикулярны другъ къ другу.

6. **Раздѣлить данную прямую пополамъ.** (Черт. 92).



Черт. 92.

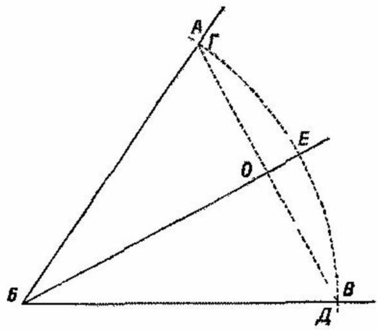
Построеніе. Изъ концовъ данной прямой *АБ* опишемъ двѣ дуги радіусомъ такой длины, чтобы дуги пересѣклись. Точки пересѣченія дугъ соединимъ прямой *ВГ*, которая и раздѣлитъ данную прямую въ точкѣ *О* пополамъ.

Доказательство. Соединимъ точки *В* и *Г* съ концами данной прямой. Получатся два треугольника *ВБГ* и *ВГА*, у которыхъ имѣется общая сторона *ВГ*, и всѣ остальныя стороны равны между собой, потому что дуги описаны однимъ радіусомъ. Слѣдовательно, треугольникъ *ВБГ* равенъ треугольнику *ВГА*. Если чертежъ перегнемъ по прямой *ВГ*, то точка *Б* упадетъ въ точку *А*, а точка *О* останется на своемъ мѣстѣ; прямая *ОБ* совмѣстится съ прямой *АО*, такъ какъ между двумя точками можно провести только одну прямую. Такимъ образомъ, отрѣзки *АО* и *ОБ* равны между собой.

Чтобы раздѣлить прямую на 4, на 8, на 16 и т. д. равныхъ частей, нужно ее раздѣлить сначала пополамъ, затѣмъ каждую половину еще пополамъ и т. д.

7. **Данный уголъ раздѣлить пополамъ.** (Черт. 93).

Построеніе. Данъ уголъ *АБВ*, который требуется раздѣлить пополамъ. Изъ вершины даннаго угла произвольнымъ радіусомъ описываемъ дугу, которая пересѣчетъ стороны угла въ точкахъ *Г* и *Д*. Точки *Г* и *Д* соединяемъ прямой линіей; прямую *ГД* дѣлимъ пополамъ; средину *ГД* соединяемъ съ вершиной угла. Прямая *БЕ* дѣлитъ уголъ *АБВ* пополамъ.



Черт. 93.

Доказательство. Треугольники *ГБО* и *ОБД* равны между собой, потому что сторона *БО* у нихъ общая; сторона *ГБ* равна сторонѣ *БД*, какъ радіусы одной дуги; сторона *ОГ* равна сторонѣ *ОД*, потому что прямую *ГД* мы дѣлили пополамъ. Слѣдовательно, углы *ОБД* и *ОБГ*, какъ совмѣщающіеся при наложеніи, равны между собой.

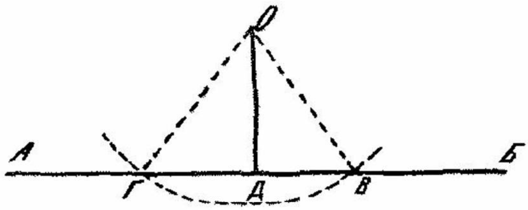
Чтобы раздѣлить уголъ на 4 равныя части, сначала нужно раздѣлить его пополамъ, а потомъ каждую половину раздѣлить снова пополамъ.

Вопросъ. Какъ раздѣлить уголъ на 8, на 16, на 32 равныя части?

8. **Изъ точки, взятой внѣ прямой, опустить на прямую перпендикуляръ.** (Черт. 94).

Построеніе. Дана прямая *АБ* и внѣ ея точка *О*. Требуется изъ точки *О* опустить перпендикуляръ на прямую *АБ*. Изъ точки *О* описываемъ дугу такимъ радіусомъ, чтобы дуга пересѣкла линію *АБ* въ двухъ точкахъ, напримѣръ, въ *Г* и *В*. Отрѣзокъ *ГВ* дѣлимъ пополамъ и средину его *Д* соединяемъ прямой линіей съ точкой *О*. Прямая *ОД*

перпендикулярна къ линіи *АБ*. **Доказать** это на основаніи равенства треугольниковъ *ГОД* и *ОДВ*.



Черт. 94

9. **На данной прямой, какъ на діаметрѣ, построить окружность.**

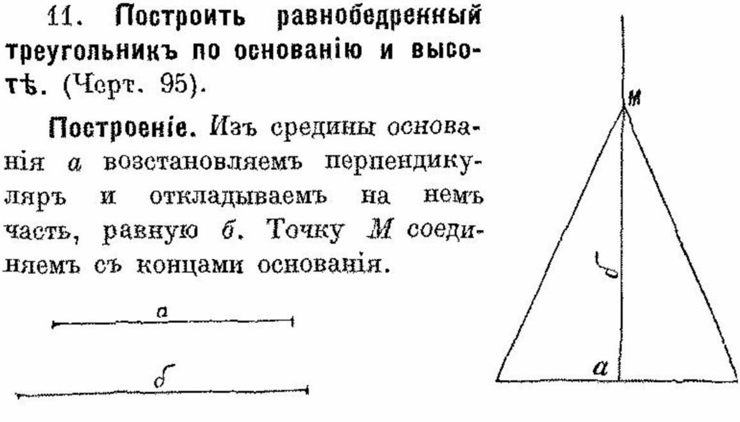
Раздѣлить данную прямую пополамъ. Средина прямой будетъ центръ, а половина прямой—радіусъ окружности.

10. **Построить прямоугольный треугольникъ по двумъ его катетамъ.**

Взять прямую, изъ какой-нибудь точки ея возставить перпендикуляръ; отложить катеты и провести гипотенузу.

11. **Построить равнобедренный треугольникъ по основанію и высотѣ.** (Черт. 95).

Построеніе. *Изъ* средины основанія *а* возстановляемъ перпендикуляръ и откладываемъ на немъ часть, равную *б*. Точку *М* соединяемъ съ концами основанія.



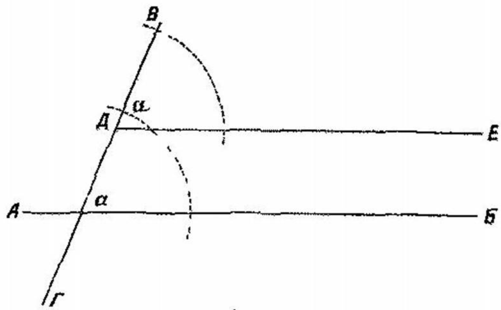
Черт 95.

Доказать, что боковыя стороны образовавшагося треугольника равны между собой.

12. **Построить прямоугольный треугольникъ по катету и гипотенузѣ.**

Взять прямую, построить перпендикуляръ, отложить данный катетъ, изъ конца катета описать дугу радiусомъ, равнымъ гипотенузѣ.

13. **Черезъ точку, взятую внѣ прямой, провести линiю, параллельную данной прямой.** (Черт. 96).



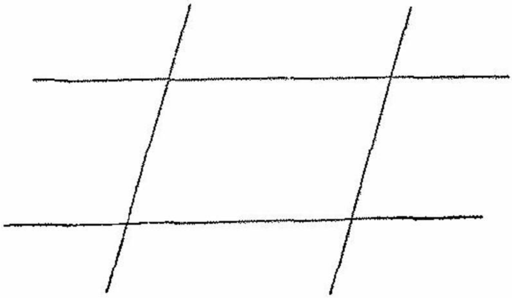
Черт. 96.

Построенiе. Дана прямая *АБ* и внѣ ея точка *Д*; требуется провести вторую прямую, проходящую черезъ точку *Д* и параллельную линiи *АБ*. Черезъ точку *Д* проведемъ наклонную *ВГ*. При точкѣ *Д*. строимъ уголъ, равный углу *а* (см. черт.).

Доказательство. Линiи *АБ* и *ДЕ* параллельны, потому что соотвѣтственные углы равны между собой.

XI. ПАРАЛЛЕЛОГРАММЪ. При помощи линейки и наугольника начертимъ двѣ параллельныя линiи и пересѣчемъ ихъ двумя другими прямыми, параллельными между собой. (Черт. 97). Образуется четыреугольникъ, у котораго противоположныя стороны *параллельны; такой четыреугольникъ называется* **параллелограммомъ.** Одна изъ сторонъ параллелограмма принимается за **основанiе**, а разстоянiе между основанiемъ

и противоположной стороной называется **высотой** параллелограмма. (Черт. 98 и 99).

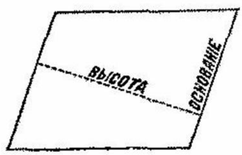


Черт. 97.

Начертимъ параллелограммъ и проведемъ въ немъ діагональ. (Черт. 100). Діагональ раздѣлитъ параллело-



Черт. 98



Черт. 99.

граммъ на два треугольника *АБВ* и *ВГА*. Эти треугольники равны между собой, потому что имѣютъ общую сторону *АВ* и по два равныхъ угла, прилежащихъ къ этой сторонѣ: уголъ *БАВ* равенъ углу *АВГ*, какъ внутренніе накрестъ лежащіе при параллельныхъ *АБ* и *ВГ*; уголъ *ГАВ* равенъ углу *БВА*, какъ внутренніе накрестъ лежащіе при параллельныхъ *АГ* и *БВ*. Такъ какъ треугольники *АБВ* и *АГВ* при наложеніи другъ



Черт 100.

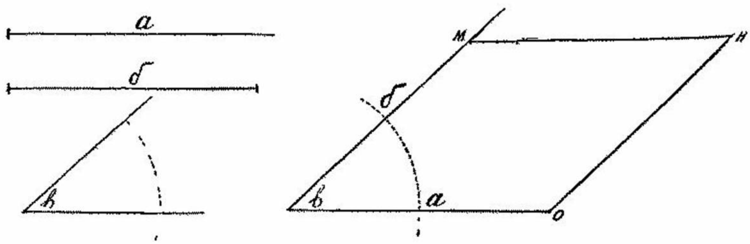
на друга совмѣстятся всѣми своими частями, то можно сдѣлать слѣдующіе **выводы**:

1. **Діагональ дѣлитъ параллелограммъ на два равныхъ треугольника.**

2. **Противоположныя стороны параллелограмма равны между собой.**

3. **Противоположные углы въ параллелограммѣ равны между собой.**

УПРАЖНЕНІЯ. 1. **Построить параллелограммъ по двумъ даннымъ его сторонамъ и по углу, заключенному между этими сторонами.** (Черт. 101).



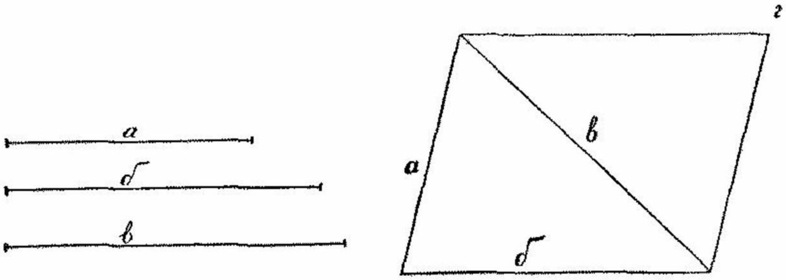
Черт. 101.

Рѣшеніе. Строимъ уголъ, равный данному углу *в*; на сторонахъ построеннаго угла откладываемъ отрѣзки, равные прямымъ *а* и *б*; черезъ точку О, отмѣченную на сторонѣ *а*, проводимъ прямую параллельно сторонѣ *б*, откладываемъ на ней часть, равную *б*, и соединяемъ прямой линіей точки М и Н. (См. черт.).

2. **Построить параллелограммъ, если даны двѣ непараллельныя его стороны и діагональ, соединяющая концы этихъ сторонъ.** (Черт. 102).

Рѣшеніе. Строимъ треугольникъ по тремъ его сторонамъ: *а*, *б* и *в*; изъ вершины треугольника проводимъ прямую параллельно основанію *б* и откладываемъ на ней часть, равную основанію; точку *г* соединяемъ прямой съ вершиной угла при основаніи. (См. черт.).

3. Одна изъ сторонъ параллелограмма равна 6 футамъ, а другая 3 футамъ. Опредѣлить периметръ этого параллелограмма.



Черт 102.

4. Одна изъ сторонъ пареллелограмма равна 1 саж. 5 фут., а другая сторона въ 3 раза меньше первой. Опредѣлить периметръ даннаго параллелограмма.

5. Периметръ параллелограмма равенъ 20 арш.; одна его сторона—4 арш. Опредѣлить длину остальныхъ сторонъ этого параллелограмма.

6. Периметръ параллелограмма равенъ 2 арш 8 вершк.; одна изъ его сторонъ на 4 вершка болѣе другой. Опредѣлить длину каждой стороны даннаго параллелограмма.

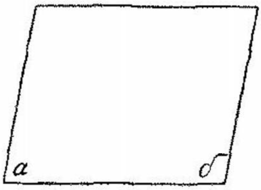
7. Периметръ параллелограмма равенъ 30 саж.; одна его сторона въ 5 разъ меньше другой. Опредѣлить длину каждой стороны этого параллелограмма.

8. Зная, что діагональ дѣлитъ параллелограммъ на два треугольника, опредѣлить, чему равна сумма всѣхъ внутреннихъ угловъ параллелограмма?

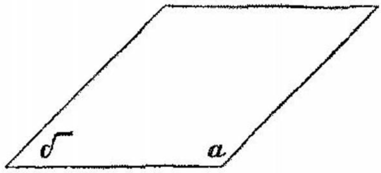
9. Доказать, что сумма двухъ угловъ параллелограмма, прилежащихъ къ одной сторонѣ, равна 2 прямымъ угламъ. (Смотри главу о параллельныхъ линіяхъ).

10. Одинъ уголъ параллелограмма равенъ 70°. Опредѣлить въ градусахъ величину остальныхъ угловъ этого параллелограмма.

11. Начерченъ параллелограммъ, у котораго уголъ *а* меньше угла *б* на 20°. Опредѣлить величину каждаго угла даннаго параллелограмма. (Черт. 103).



Черт 103



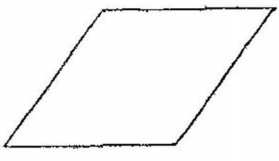
Черт. 104.

12. Данъ параллелограммъ, у котораго уголъ *а* въ 3 раза больше угла *б*. Опредѣлить величину каждаго угла даннаго параллелограмма. (Черт. 104).

13. Внѣшній уголъ параллелограмма равенъ $^2/_3$ прямого. Опредѣлить величину внутреннихъ угловъ этого параллелограмма.

14. Внѣшній уголъ параллелограмма въ 3 раза больше внутренняго, смежнаго съ нимъ. Опредѣлить внутренніе углы даннаго параллелограмма.

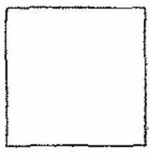
XII. ВИДЫ ПАРАЛЛЕЛОГРАММОВЪ. 1. Параллелограммъ, у котораго всѣ стороны равны, называется **ромбомъ.** (Черт. 105).



Черт 105



Черт 106



Черт 107.

2. Параллелограммъ, у котораго всѣ углы прямые, называется **прямоугольникомъ.** (Черт. 106).

3. Ромбъ съ прямыми углами называется **квадратомъ.** (Черт. 107).

УПРАЖНЕНІЯ. 1. Начертить ромбъ, у котораго одинъ уголъ равенъ $^1/_2$ прямого, а сторона въ 6 сантим.

2. Начертить прямоугольникъ, у котораго одна сторона въ 3 дюйма, а другая въ 2 дюйма.

3. Начертить квадратъ, сторона котораго равна 1 дец.

4. Всякій ли параллелограммъ есть прямоугольникъ?

5. Всякій ли прямоугольникъ есть параллелограммъ?

6. Всякій ли ромбъ есть квадратъ?

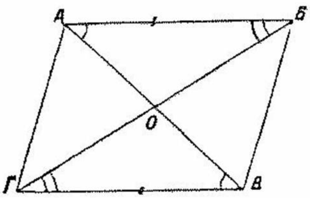
7. Всякій ли квадратъ есть ромбъ?

8. Всякій ли прямоугольникъ есть квадратъ?

9. Периметръ ромба равенъ 3 арш. 12 вершк. Опредѣлить сторону даннаго ромба.

10. Периметръ прямоугольника равенъ 1 арш.; одна сторона его 4 вершка. Квадратъ ли этотъ прямоугольникъ?

XIII. ДІАГОНАЛИ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА. Начертимъ параллелограммъ *АБВГ*. (Черт. 108). Проведемъ въ немъ двѣ діагонали; тогда параллелограммъ разобьется на 4 треугольника. Разсмотримъ треугольники *АБО* и *ГВО*. Сторона *АБ* равна сторонѣ *ГВ*, потому что это противоположныя стороны параллелограмма. Уголъ *ОАБ* равенъ углу *ОВГ*, потому что это углы внутренніе накрестъ лежащіе между параллельными линіями; на томъ же основаніи и углы *ОГВ* и *ОБА* равны между собой. Такимъ образомъ, мы имѣемъ два треугольника, у которыхъ есть по равной сторонѣ и по два равныхъ угла, прилежащихъ къ этимъ сторонамъ; а мы знаемъ, что такіе треугольники равны между собой. Слѣдовательно, части діагоналей *АО*=*ОВ*, *БО*=*ОГ*.



Черт 108

ВЫВОДЪ. Діагонали параллелограмма при пересѣченіи дѣлятся пополамъ.

УПРАЖНЕНІЯ. 1. Начертить параллелограммъ и найти его средину, т.-е. точку пересѣченія діагоналей.

2. Какъ найти средину пола или потолка прямоугольной комнаты?

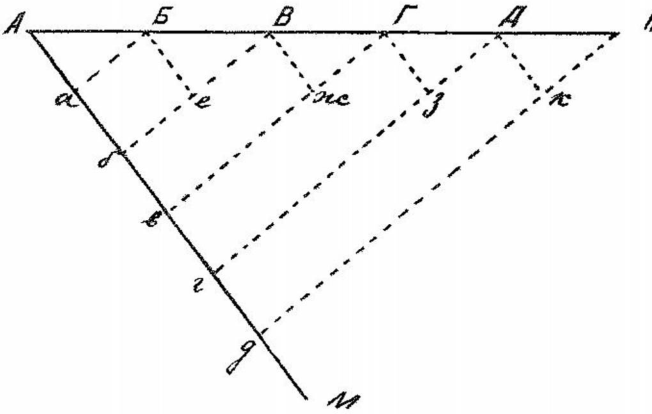
3. Начертить ромбъ, провести въ немъ двѣ діагонали и доказать, что **діагонали ромба взаимно перпендикулярны и дѣлятъ углы ромба пополамъ.** (На основаніи равенства образовавшихся треугольниковъ).

4. Начертить прямоугольникъ, провести въ немъ двѣ діагонали и доказать, что **діагонали прямоугольника равны между собой.** (На основаніи равенства прямоугольныхъ треугольниковъ, катетами которыхъ служатъ стороны прямоугольника, а гипотенузами—діагонали).

5. **Построить параллелограммъ, если даны двѣ его діагонали и уголъ, образованный пересѣченіемъ діагоналей.**

6. **Построить квадратъ, если дана его діагональ.**

7. **Построить ромбъ, если даны двѣ его діагонали.**



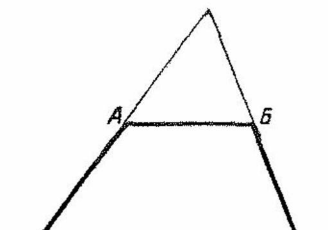
Черт. 109

8. **Раздѣлить прямую на произвольное число равныхъ частей.** (Черт. 109).

Раздѣлимъ прямую *АН*, напримѣръ, на 5 равныхъ частей. Для этого изъ точки *А* проведемъ произвольную прямую *АМ* и отложимъ на ней 5 равныхъ отрѣзковъ. Послѣднюю точку *д* соединимъ съ *Н* и изъ точекъ *г*, *в*, *б*, *а* проведемъ линіи параллельно *дН*. Тогда *АН* раздѣлится на 5 равныхъ частей.

Доказательство. Для доказательства проведемъ изъ точекъ *Б*, *В*, *Г* и *Д* прямыя *Бе*, *Вж*, *Гз* и *Дк* параллельно *АМ*. Тогда имѣемъ: *Бе*=*аб*, *Вж*=*бв*, *Гз*=*вг* и т. д., какъ противоположныя стороны параллелограмма. Отрѣзки *Аа*, *аб*, *бв*... равны между собой, потому что мы откладывали ихъ равными; слѣдовательно, и отрѣзки *Аа*, *Бе*, *Вж*... равны между собой. Углы *БАа*, *ВБе*, *ГВж* равны между собой, какъ соотвѣтственные при параллельныхъ линіяхъ. Углы *АаБ*, *БеВ*, *ВжГ*... также равны между собой. (Почему?) Треугольники *БаА*, *ВеБ*, *ГжВ*... всѣ равны другъ другу. Слѣдовательно, и отрѣзки *АБ*=*БВ*=*ВГ*...

XIV. ТРАПЕЦІЯ. Начертимъ треугольникъ. (Черт. 110). Черезъ точку *А* проведемъ прямую *АБ* параллельно основанію треугольника *ГВ*. Получится четыреугольникъ *АБВГ*, у котораго двѣ стороны парал-



Черт. 110

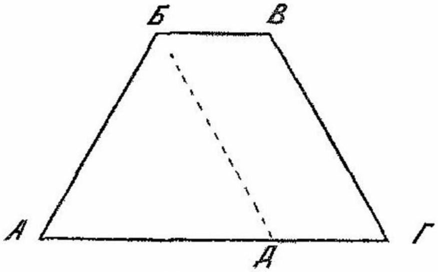


Черт 111

лельны, а двѣ другія непараллельны. Такой четыреугольникъ называется **трапеціей**. Параллельныя стороны трапеціи называются ея **основаніями**, а непа-

раллельныя — **боковыми сторонами.** Разстояніе между основаніями трапеціи называется ея **высотой.** (Черт. 111). Трапеція, у которой боковыя стороны равны между собой, называется **равнобедренной.**

Дана равнобедренная трапеція *АБВГ*. (Черт. 112). Изъ вершины *Б* проведемъ прямую параллельно боковой сторонѣ *ВГ*; образуется параллелограммъ *БВГД*. Сторона *БД* равна сторонѣ *ВГ*, какъ противоположная сторона параллелограмма, а сторона *ВГ* равна сторонѣ *АБ*, потому что трапеція дана равнобедренная. Слѣдовательно, *АБ*=*БД*; значитъ, треугольникъ *АБД* равнобедренный. Уголъ *А*=углу *БДА*, какъ углы при основаніи равнобедреннаго треугольника. Но уголъ *БДА*=углу *Г*, какъ соотвѣтственные при параллельныхъ *БД* и *ВГ*; поэтому уголъ *А*= углу *Г*. Уголъ *В*+уголъ *Г*=2 прямымъ; уголъ *А*+уголъ *Б*=2 прямымъ. Слѣдовательно, уголъ *Б*=углу *В*.



Черт 112

ВЫВОДЪ. У равнобедренной трапеціи углы при основаніяхъ равны между собой.

УПРАЖНЕНІЯ. 1. При помощи транспортира и линейки начертить равнобедренную трапецію, у которой большее основаніе равно 8 сантим., углы при этомъ основаніи по 60°, а боковыя стороны по 3 см.

2. Начертить трапецію, у которой большее основаніе равно 10 сантим., одинъ уголъ при основаніи прямой, высота 5 сантим., а меньшее основаніе 7 сантим.

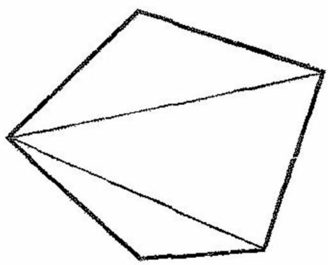
3. Одинъ уголъ при основаніи трапеціи равенъ $^2/_3$ прямого, а другой—80°. Опредѣлить остальные углы данной трапеціи.

4. Одинъ изъ угловъ въ равнобедренной трапеціи равенъ $^3/_4$ прямого. Опредѣлить остальные углы этой трапеціи.

5. Въ равнобедренной трапеціи уголъ при меньшемъ основаніи на 20° больше угла при большемъ основаніи. Опредѣлить величину каждаго угла данной трапеціи.

6. Въ равнобедренной трапеціи уголъ при меньшемъ основаніи въ 2 раза болѣе угла при большемъ основаніи. Опредѣлить величину каждаго угла этой трапеціи.

XV. СУММА ВНУТРЕННИХЪ И ВНѢШНИХЪ УГЛОВЪ МНОГОУГОЛЬНИКА. Сумма внутреннихъ угловъ треугольника равна 2 прямымъ угламъ. Сумма внутреннихъ угловъ всякаго четыреугольника равна 4 прямымъ, потому что четыреугольникъ діагональю дѣлится на 2 треугольника. Сумма внутреннихъ угловъ пятиугольника равна 6 прямымъ, потому что діагоналями, проведенными изъ одной вершины, пятиугольникъ дѣлится на 3 треугольника. (Черт. 113).



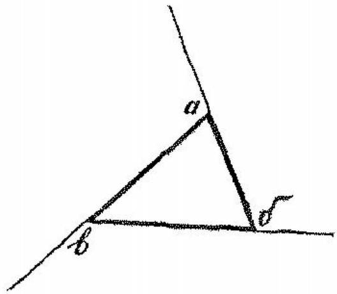
Черт 113

Шестиугольникъ діагоналями, проведенными изъ одной вершины, дѣлится на 4 треугольника. Слѣдовательно, сумма внутреннихъ угловъ шестиугольника равна $2 \times 4 = 8$ прямымъ угламъ.

Опредѣлить сумму внутреннихъ угловъ семиугольника, восьмиугольника, девятиугольника, двѣнадцатиугольника, двадцатиугольника.

ВЫВОДЪ. Сумма внутреннихъ угловъ многоугольника равна 2 прямымъ угламъ, умноженнымъ на число сторонъ этого многоугольника безъ двухъ, потому что діагоналями, проведенными изъ одной вершины, многоугольникъ дѣлится на столько треугольниковъ, сколько въ многоугольникѣ сторонъ безъ двухъ.

Начертимъ треугольникъ и продолжимъ каждую его сторону, какъ показано на чертежѣ 114, образуются 3 внѣшнихъ угла треугольника: *а*, *б* и *в*. Внѣшніе углы треугольника вмѣстѣ съ внутренними составляютъ 3 пары смежныхъ угловъ или 6 прямыхъ. Внутренніе же углы въ суммѣ даютъ 2 прямыхъ; слѣдовательно, на долю внѣшнихъ приходится 6—2=4 прямыхъ угла.

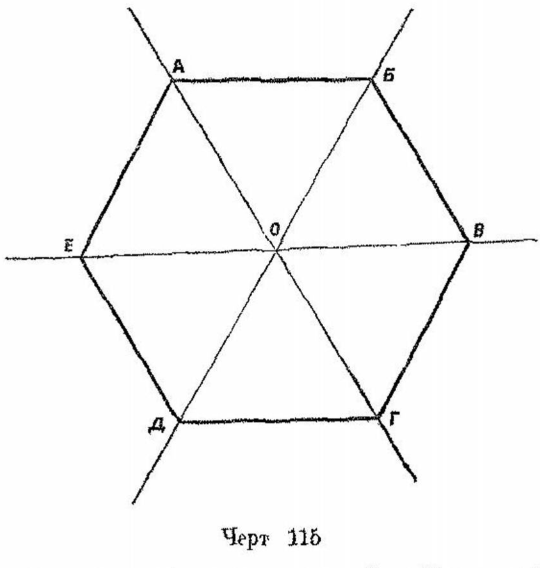


Черт. 114

Опредѣлить сумму внѣшнихъ угловъ четыреугольника, пятиугольника, шестиугольника, восьмиугольника, двѣнадцатиугольника.

ВЫВОДЪ. Сумма внѣшнихъ угловъ всякаго многоугольника равна 4 прямымъ угламъ.

XVI. ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ. Возьмемъ на плоскости бумаги точку *О*. (Черт. 115). При



Черт 115

помощи транспортира начертимъ вокругъ этой точки 6 равныхъ угловъ, изъ которыхъ каждый будетъ равенъ 360 : 6=60°. На сторонахъ начерченныхъ угловъ отложимъ отъ точки *О* по равной части: *АО*=*ОБ*=*ОВ* и т. д., соединимъ прямыми линіями точки *А*, *Б*, *В*, *Г* и т. д. Получится шестиугольникъ, состоящій изъ 6 треугольниковъ. Всѣ эти треугольники равны между собой, потому что имѣютъ по равному углу при точкѣ *О* и по двѣ равныхъ стороны, образующихъ этотъ уголъ; а потому и стороны шестиугольника: *АБ*, *БГ*, *ВГ* и т. д. равны между собой. Кромѣ того, углы шестиугольника *АБВ*, *БВГ*, *ВГД* и т. д. равны между собой, такъ какъ они состоятъ изъ равныхъ половинъ.

Такой многоугольникъ, у котораго всѣ стороны и углы равны между собой, называется **правильнымъ.**

Изъ треугольниковъ правильный—равносторонній треугольникъ. Изъ четыреугольниковъ правильный—квадратъ.

УПРАЖНЕНІЯ. 1. Такимъ способомъ, какъ чертили правильный шестиугольникъ, начертить слѣдующія фигуры: а) правильный треугольникъ) б) правильный четыреугольникъ, в) правильный пятиугольникъ, г) правильный восьмиугольникъ, д) правильный десятиугольникъ.

2. Опредѣлить величину внутренняго угла правильнаго шестиугольника.

3. Опредѣлить величину внутренняго угла правильнаго пятиугольника.

4. Опредѣлить величину внутренняго угла правильнаго восьмиугольника.

5. Опредѣлить величину внутренняго и внѣшняго угловъ правильнаго двѣнадцатиугольника.

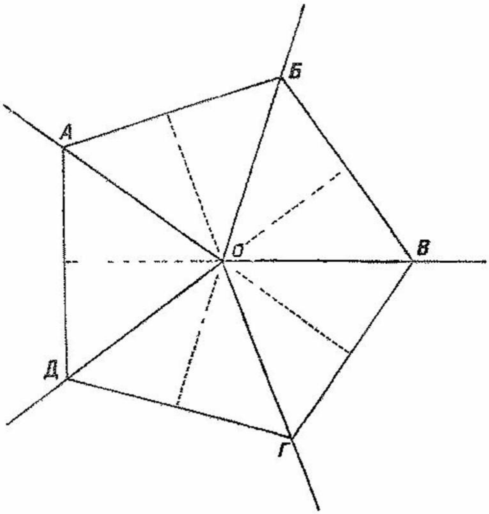
6. Опредѣлить внѣшніе углы правильныхъ пятиугольника, шестиугольника, восьмиугольника, пятнадцатиугольника.

7. При помощи транспортира и линейки начертить правильный пятиугольникъ, сторона котораго равна 6 сантиметрамъ.

8. Начертить правильный шестиугольникъ, сторона котораго равна 5 сантиметрамъ.

9. Начертить правильный восьмиугольникъ, сторона котораго равна 2 дюймамъ.

10. Начертимъ правильный пятиугольникъ такъ, какъ мы чертили правильный шестиугольникъ. (См. черт. 115). Изъ точки *O* опустимъ перпендикуляры на стороны пятиугольника. (Черт. 116). Такъ какъ треугольники *АОБ*



Черт 116

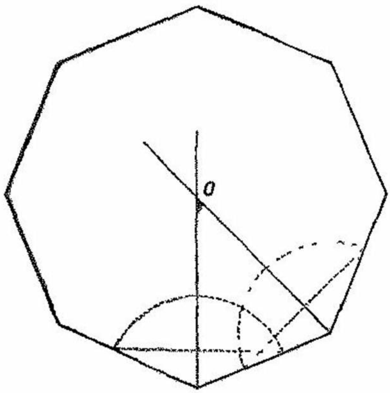
БОВ, *ВОГ* и т. д. равны между собой, то и перпендикуляры, опущенные изъ вершины *O* на основанія этихъ треугольниковъ, тоже равны между собой. Слѣдовательно, точка *O* равно отстоитъ отъ сторонъ начерченнаго пятиугольника. Точка, равно отстоящая отъ сторонъ правильнаго многоугольника, называется **центромъ** многоугольника, а перпендикуляръ, опущенный изъ центра на сто-

рону, называется **апоѳемой** правильнаго многоугольника.

11. Начертить правильный восьмиугольникъ и провести въ немъ апоѳему.

12. **Найти центръ правильнаго многоугольника.**

Рѣшеніе. Данъ правильный многоугольникъ (черт. 117) Нужно найти центръ этого многоугольника. Мы видѣли, что прямыя линіи, соединяющія центръ правильнаго многоугольника съ его вершинами, дѣлятъ внутренніе углы этого многоугольника пополамъ. Поэтому раздѣлимъ два угла даннаго многоугольника пополамъ и продолжимъ равнодѣлящія угловъ до ихъ взаимнаго пересѣченія. Точка пересѣченія этихъ линій и будетъ центромъ даннаго многоугольника.



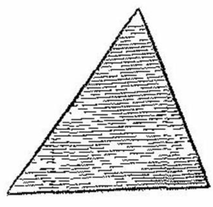
Черт. 117

VI. ИЗМѢРЕНІЕ ПЛОЩАДЕЙ.

I. ПОНЯТІЕ О ПЛОЩАДИ ФИГУРЫ. УПРАЖНЕНІЯ.

1. Начертить треугольникъ и затушевать ту часть плоскости бумаги, которую занимаетъ этотъ треугольникъ. (Черт. 118).

2. Начертить прямоугольникъ и затушевать занимаемую имъ часть плоскости.



Черт 118.

3. Начертить пятиугольникъ, шестиугольникъ и кругъ и затушевать части плоскостей, занимаемыя этими фигурами.

Величина плоскости, занимаемой фигурой, называется площадью этой фигуры.

II. КВАДРАТНЫЯ МѢРЫ. УПРАЖНЕНІЯ. 1. Начертить квадратъ, имѣющій стороны по 1 вершку.

2. Начертить квадраты, имѣющіе стороны: а) по 1 дюйму, б) по 1 сантиметру, в) по 1 дециметру.

3. На классной доскѣ начертить квадраты, имѣющіе стороны по 1 футу и по 1 аршину.

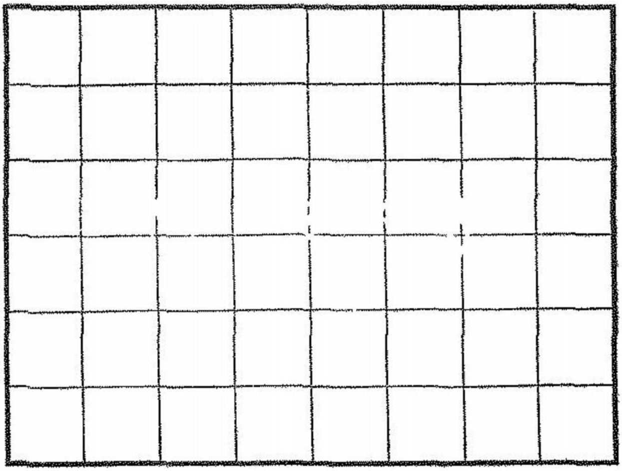
Площадь многоугольника, равная площади квадрата, имѣющаго стороны по 1 вершку, называется **квадратнымъ вершкомъ**; площадь многоугольника, равная площади квадрата, имѣющаго стороны по 1 футу, называется **квадратнымъ футомъ.**

7. Какую площадь можно назвать **квадратнымъ дюймомъ**? **Квадратнымъ аршиномъ**?

Фигуры, площади которыхъ равны между собой, называются **равновеликими.** Но нельзя смѣшивать понятіе о равновеликости фигуръ съ ихъ равенствомъ. Равными называются такія фигуры, которыя при наложеніи совмѣщаются всѣми своими частями. Слѣдовательно, треугольникъ можетъ быть равенъ только треугольнику, четыреугольникъ—четыреугольнику, кругъ—кругу и проч. Равновеликими же между собой могутъ быть и треугольникъ съ четыреугольникомъ, и пятиугольникъ съ квадратомъ, и шестиугольникъ съ треугольникомъ и проч.

III. ПЛОЩАДЬ ПРЯМОУГОЛЬНИКА. УПРАЖНЕНІЯ. 1. Начертимъ прямоугольникъ, длиною въ 8 сантиметровъ и шириною въ 6 сантиметровъ. (Черт. 119). Основаніе (длину) этого прямоугольника раздѣлимъ на *8 равныхъ частей (по 1 сантим. въ каждой части)*, а высоту (ширину) раздѣлимъ на 6 равныхъ частей. Черезъ точки дѣленія высоты проведемъ прямыя параллельно основанію, а черезъ точки дѣленія основанія—прямыя параллельно высотѣ. Тогда весь прямоугольникъ

разобьется на квадратики, стороны которыхъ равны 1 сантиметру. Площадь каждаго квадратика равна квадратному сантиметру. Въ одномъ ряду расположено 8 квадратныхъ сантиметровъ, а такихъ рядовъ во всемъ прямоугольникѣ 6. Слѣдовательно, площадь прямоугольника равна $8 \times 6 = 48$ квадр. сантим.



Черт 119

2. Начертить прямоугольникъ, основанiе котораго равно 6 дюймамъ, а высота 4 дюймамъ. Разбить этотъ прямоугольникъ на квадратики *по* 1 *квадратному* дюйму въ каждомъ. Сколько квадратныхъ дюймовъ во всей площади начерченнаго прямоугольника?

3. Прямоугольникъ имѣетъ въ длину 10 арш., а въ ширину 6 арш. Сколько получится квадратныхъ аршинъ, если этотъ прямоугольникъ, подобно предыдущимъ, разбить на квадраты, стороны которыхъ равны 1 аршину?

4. Основанiе прямоугольника равно 14 вершкамъ, а высота 12 вершкамъ. На сколько квадратныхъ вершковъ можно разбить площадь этого прямоугольника?

ВЫВОДЪ. Чтобы измѣрить площадь прямоугольника, нужно какой-нибудь линейной мѣрой измѣрить его длину и ширину, затѣмъ полученныя числа перемножить. Произведенiе покажетъ, сколько квадратныхъ единицъ заключаетъ въ себѣ площадь даннаго прямоугольника. Короче этотъ выводъ можно выразить такъ: **площадь прямоугольника равняется произведенiю основанiя на высоту.**

УПРАЖНЕНIЯ. 1. Опредѣлить площадь прямоугольника, длина котораго равна 1 аршину, а ширина 7 вершк.

2. Опредѣлить площадь квадрата, сторона котораго равна 9 вершк.

3. Опредѣлить площадь квадрата, сторона котораго равна 7 аршинамъ.

4. Сколько квадратныхъ аршинъ въ квадратной сажени?

5. Сколько квадратныхъ вершковъ въ квадратномъ аршинѣ?

6. Сколько квадратныхъ футовъ въ квадратной сажени?

7. Сколько квадратныхъ дюймовъ въ квадратномъ футѣ?

8. Сколько квадратныхъ сантиметровъ въ квадратномъ метрѣ?

9. Основанiе прямоугольника равно 2 арш., а высота 1 арш. 5 вершк. Опредѣлить площадь этого прямоугольника.

10. ***Десятина равна 2400 квадр. саженямъ.*** Какова должна быть длина десятины, если ее представить въ видѣ прямоугольника шириною: а) въ 20 саж., б) въ 30 саж., в) въ 40 саж., г) въ 15 саж.?

11. Длина прямоугольнаго участка земли равна 240 саженямъ, а ширина 80 саженямъ. Сколько десятинъ въ этомъ участкѣ?

12. Площадь прямоугольника равна 1 квадр. арш. 24 квадр. вершк. Опредѣлить длину этого прямоугольника, если его ширина равна 14 вершк.

13. Площадь прямоугольника равна $49^1/_2$ квадр. арш. Опредѣлить длину этого прямоугольника, если его ширина равна 5 арш. 8 вершк.

14. Прямоугольный участокъ земли равенъ 15 десятинамъ. Опредѣлить длину этого участка, если его ширина равна 90 саж.

15. Периметръ прямоугольника равенъ 2 арш. 12 вершк. Основаніе его больше высоты на 6 вершк. Опредѣлить площадь даннаго прямоугольника.

16. Периметръ прямоугольника равенъ 5 арш. 8 вершк. Опредѣлить площадь этого прямоугольника, если длина его въ 3 раза больше ширины.

17. Полъ прямоугольной комнаты имѣетъ въ длину 10 арш., а въ ширину $7^1/_2$ арш. Сколько стоитъ выкрасить этотъ полъ, если за окраску 1 квадратной сажени берутъ 90 коп.?

18. Участокъ лѣса имѣетъ въ длину 1 версту 125 саж., а въ ширину 400 саженъ. Сколько стоитъ этотъ лѣсъ, если десятину его цѣнить въ 420 рублей?

19. Начертить квадратъ, сторона котораго равна 12 сантиметрамъ, а потомъ начертить равновеликій ему прямоугольникъ съ основаніемъ въ 16 сантиметровъ.

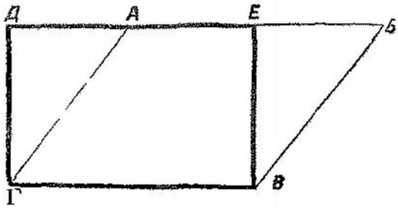
20. Начертить квадратъ, сторона котораго равна 8 сантиметрамъ, а потомъ начертить равновеликій ему прямоугольникъ съ основаніемъ въ 10 сантиметровъ

21. Сторона квадрата равна 4 саж. Опредѣлить ширину прямоугольника, равновеликаго данному квадрату, если длина этого прямоугольника равна 12 саж.

22. Сторона квадрата равна 5 арш. Опредѣлить длину прямоугольника, равновеликаго данному квадрату, если ширина этого прямоугольника равна 4 аршинамъ.

IV. ПЛОЩАДЬ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА. Начертимъ параллелограммъ *АБВГ*. (Черт. 120). На основаніи параллелограмма построимъ прямоугольникъ *ДЕВГ*, имѣющій высотою высоту параллелограмма Прямоугольные

треугольники *ДАГ* и ЕБВ равны между собой, потому что ихъ стороны *АГ* и *БВ* равны, какъ противоположныя стороны параллелограмма; уголъ *ДАГ* равенъ углу ЕБВ, какъ углы соотвѣтственные; углы *ГДА* и *БЕВ* прямые, слѣдовательно, и углы *ДГА* и *ЕВБ* равны между собой. Очевидно, если съ одной стороны отъ фигуры отнимемъ часть плоскости, а съ другой стороны прибавимъ такую же часть, то площадь фигуры не измѣнитъ своей величины. Слѣдовательно, **площадь параллелограмма равна площади такого прямоугольника, у котораго основанiе и высота равны порознь основанiю и высотѣ параллелограмма.**



Черт 120

ВЫВОДЪ. Площадь параллелограмма равняется произведенiю основанiя на высоту.

УПРАЖНЕНIЯ. 1. Начертить нѣсколько параллелограммовъ съ разными углами, но съ равными основанiями и высотами. а) Равновелики ли эти параллелограммы? б) Равны ли между собою эти параллелограммы?

2. Участокъ земли имѣетъ видъ параллелограмма, основанiе котораго равно 360 саж., а высота 280 саж. Сколько стоитъ этотъ участокъ, если его цѣнить по 180 руб. за десятину?

3. Площадь параллелограмма равна 393 квадр. саж. 5 квадр. арш. Опредѣлить высоту этого параллелограмма, если основанiе его равно 25 саж. 2 арш.

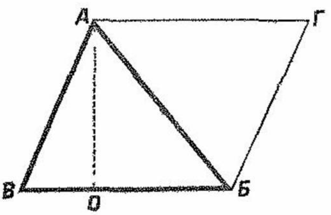
4. Периметръ квадрата равенъ 120 саж., и периметръ прямоугольника, у котораго основанiе въ 2 раза болѣе высоты, равенъ 120 саж. Что больше—площадь даннаго квадрата или прямоугольника?

5. Стороны прямоугольника—12 и 8 дюймовъ; стороны *параллелограмма*, имѣющаго *острые* и *тупые* углы, тоже 12 и 8 дюймовъ. Какая площадь больше,—прямоугольника или параллелограмма?

6. Начертить прямоугольникъ, основанıе котораго равнялось бы 8 сантим., а высота 5 сантим.; потомъ начертить равновеликій ему параллелограммъ съ основаніемъ тоже 8 сантим., а съ углами въ 60° и 120°.

7. Начертить квадратъ, имѣющій стороны по 8 сант.; потомъ начертить равновеликій ему параллелограммъ, одна сторона котораго равна 8 сантим., а другая 12 сантим.

V. ПЛОЩАДЬ ТРЕУГОЛЬНИКА. Начертимъ *треугольникъ* $АБВ$. (Черт. 121). Изъ вершины треугольника $А$ проведемъ линію параллельно основанію $ВБ$, а изъ вершины $Б$ проведемъ прямую параллельно сторонѣ $ВА$. Получится параллелограммъ $АГБВ$, который имѣетъ съ даннымъ треугольникомъ одно основаніе и высоту. Треугольники $ВАБ$ и $АГБ$ равны между собой, такъ какъ діагональ дѣлитъ параллелограммъ на два равныхъ треугольника. Площадь параллелограмма $АГБВ$ равняется произведенію *основанія* $БВ$ на *высоту* $АО$; слѣдовательно, площадь треугольника $АБВ$ равна половинѣ этого произведенія.

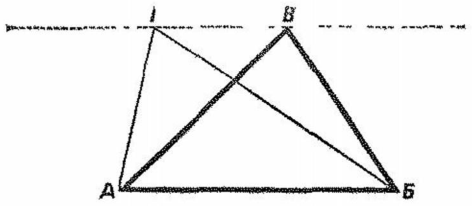


Черт. 121

ВЫВОДЪ. Площадь треугольника равна половинѣ *произведенія основанія на высоту.*

УПРАЖНЕНІЯ. 1. Начерчены два треугольника, которые имѣютъ одно и тоже основаніе $АБ$, и вершины ко-

торыхъ лежатъ на линіи, параллельной основанію. (Черт. 122). а) Равновелики ли эти треугольники? б) Всѣ ли треугольники, имѣющіе одно основаніе, и вершины которыхъ лежатъ на прямой, параллельной основанію, равновелики между собой?



Черт. 122

2. Основаніе треугольника равно 6 вершкамъ, а высота 4 верш. Опредѣлить площадь этого треугольника.

3. Основаніе треугольника равно 1 арш. 6 верш., а высота на 4 вершка меньше основанія. Опредѣлить площадь этого треугольника.

4. Одинъ треугольникъ имѣетъ основаніе въ 12 верш. и высоту въ 8 верш.; другой треугольникъ имѣетъ основаніе въ 14 дюймовъ, а высоту въ 21 дюймъ. Равновелики ли эти треугольники?

5. Площадь треугольника равна 36 квадр. дюйм., высота его равна 9 дюйм. Опредѣлить основаніе даннаго треугольника.

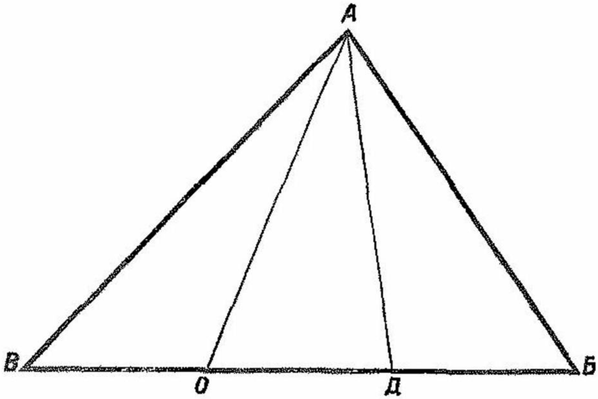
6. Площадь треугольника равна 144 квадр. саж. Опредѣлить высоту этого треугольника, если его основаніе— равно а) 12 саж.; б) 18 саж.; в) 24 саж.; г) 36 саж.

7. Участокъ земли имѣетъ форму треугольника, одна сторона котораго равна 75 саж., а разстояніе этой стороны отъ противоположной вершины треугольника равно 40 саж. Опредѣлить площадь даннаго участка.

8. Поле имѣетъ видъ прямоугольнаго треугольника, катеты котораго равны 360 саж. и 280 саж. Сколько десятинъ въ этомъ полѣ?

9. Три крестьянина купили участокъ земли, имѣющій видъ треугольника *АБВ*. (Черт. 123). Эту землю они

раздѣлили между собою поровну такимъ образомъ: раздѣлили сторону *БВ* на 3 равныя части и точки дѣленія *О* и *Д* соединили прямыми межами съ вершиной треугольника *А*. Вѣрно ли крестьяне раздѣлили землю?



Черт. 123.

10. Данъ прямоугольникъ, діагональ котораго равна 12 арш., а перпендикуляръ, опущенный изъ вершины прямоугольника на діагональ,—5 арш. Опредѣлить площадь даннаго прямоугольника.

11. Одна діагональ ромба равна 10 вершкамъ, а другая—12 верш. Опредѣлить площадь этого ромба.

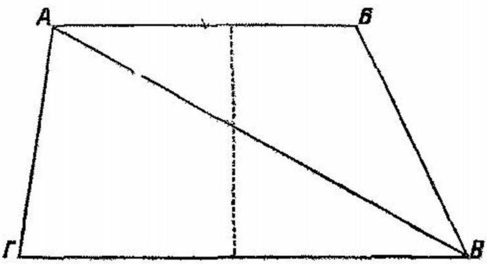
12. Діагональ квадрата равна 16 дюйм. Опредѣлить площадь этого квадрата.

13. Начертить въ видѣ треугольника: а) квадратный дюймъ, б) квадратный вершокъ, в) квадратный дециметръ.

VI. ПЛОЩАДЬ ТРАПЕЦІИ. УПРАЖНЕНІЯ. 1. Дана трапеція, параллельныя стороны которой равны 12 и 8 дюйм., а высота—6 дюйм. (Черт. 124).

Вычислить площадь данной трапеціи.

РѢШЕНІЕ. Діагональю AB дѣлимъ трапецію на два треугольника $АБВ$ и $ВГА$. Площадь треугольника $АБВ$ равна $\frac{8.6}{2}$ =24 квадр. дюйм. Площадь треугольника $ВГА$



Черт. 124.

равна $\frac{12.6}{2}$=36 квадр. дюйм. Слѣдовательно, площадь всей трапеціи равна 36+24=60 квадр. дюйм.

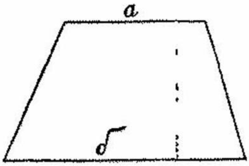
2. Вычислить площадь трапеціи, у которой основаніе равно 6 арш., сторона, параллельная основанію,—4 арш., а высота—2 арш.

3. Вычислить площадь трапеціи, у которой основаніе равно 2 саж. 2 арш., сторона, противоположная основанію, на 1 аршинъ меньше основанія, а высота 1 саж. 2 арш.

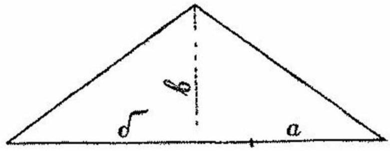
ВЫВОДЪ. Чтобы вычислить площадь трапеціи, нужно ея параллельныя стороны помножить на высоту, полученныя произведенія сложить и сумму раздѣлить пополамъ. Указанныя дѣйствія можно расположить и въ такомъ порядкѣ: найти сумму параллельныхъ сторонъ трапеціи, раздѣлить сумму пополамъ и полученное частное помножить на высоту. Слѣдовательно, **площадь трапеціи равна произведенію полусуммы параллельныхъ сторонъ на высоту.**

4. Сумма параллельныхъ сторонъ трапеціи равна 12 саж. 1 арш., а высота ея—5 саж. Опредѣлить площадь этой трапеціи.

5. Опредѣлить площадь трапеціи, у которой основаніе равно 1 арш. 6 верш., сторона, противоположная

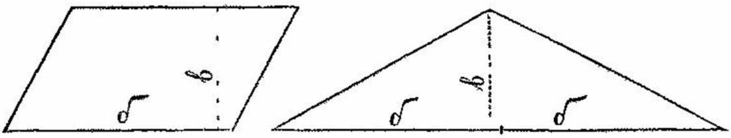


Черт. 125



Черт 126.

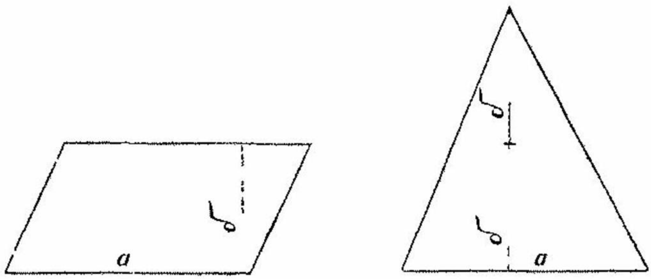
основанію, на 8 верш. меньше основанія, а высота равна полусуммѣ параллельныхъ сторонъ.



Черг 127

6. Основаніе трапеціи равно 3 саж. 1 арш., сторона, параллельная основанію, вдвое меньше основанія, а высота втрое меньше суммы параллельныхъ сторонъ. Опредѣлить площадь данной трапеціи.

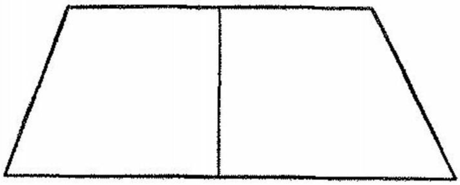
7. Начертить треугольникъ, который былъ бы равновеликъ данной трапеціи (чертежи 125 и 126).



Черт 128

8. Начертить треугольникъ, равновеликій данному параллелограмму. (Черт. 127 и 128).

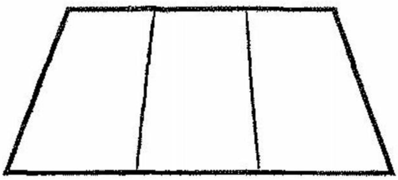
9. Раздѣлить площадь трапеціи пополамъ. (Черт. 129).



Черт 129.

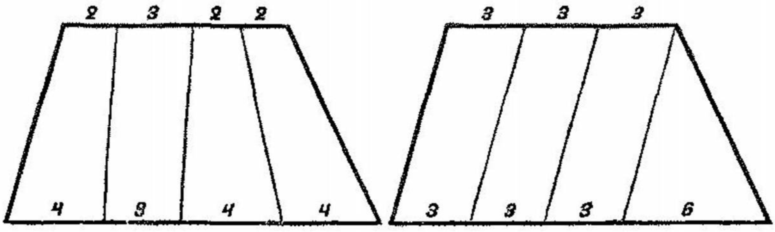
РѢШЕНІЕ. Раздѣлить пополамъ параллельныя стороны, и точки дѣленія соединить прямой линіей.

10. Раздѣлить площадь трапеціи на 3 равныя части. (Черт. 130).



Черт. 130.

11. Раздѣлить на 4 равныя части площадь трапеціи, у которой параллельныя стороны равны 9 и 15 саж. (Черт. 131).

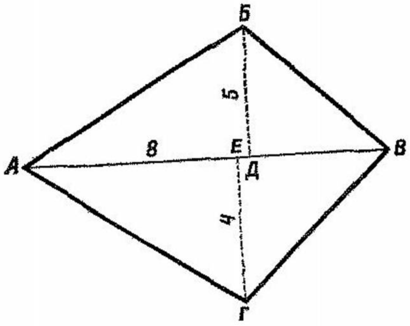


Черт. 131

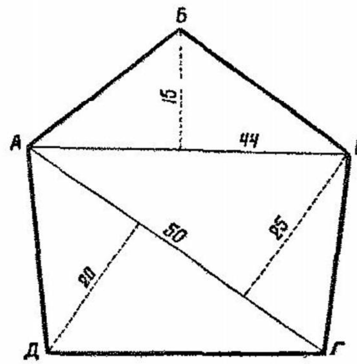
12. Начертить трапецію и раздѣлить ея площадь на двѣ части такъ, чтобы вторая часть была втрое болѣе первой.

VII. ВЫЧИСЛЕНІЕ ПЛОЩАДЕЙ НЕПРАВИЛЬНЫХЪ МНОГОУГОЛЬНИКОВЪ. УПРАЖНЕНІЯ. 1. Данъ четыреугольникъ *АБВГ*. (Черт. 132).

Чтобы вычислить площадь этого четыреугольника, разобьемъ его діагональю *АВ* на два треугольника.

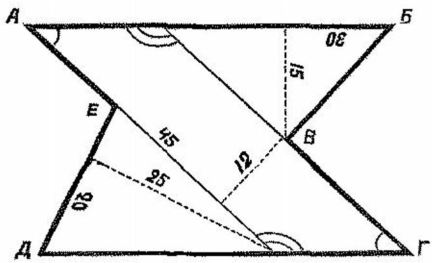


Черт. 132.



Черт. 133.

Изъ вершинъ *Б* и *Г* опустимъ на діагональ перпендикуляры *БД* и *ГЕ*; измѣримъ діагональ и перпендикуляры.

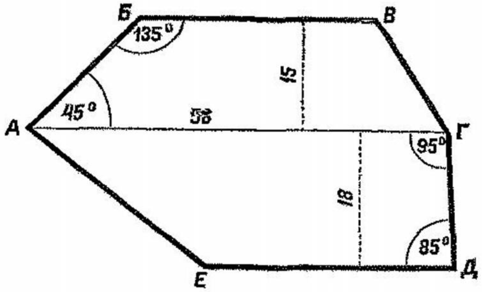


Черт. 134.

Допустимъ, что діагональ равна 8 ст., перпендикуляръ *БД*—5 сантим., а *ГЕ*—4 сантим. Площадь треугольника *АБВ* будетъ равна $\frac{8.5}{2}=20$ квадр. сантим., а площадь треугольника $ВГА=\frac{8.4}{2}=16$ квадр. сант. Слѣдовательно,

площадь всего четыреугольника равна 20+16=36 квадр. сантим.

2. Вычислить площадь многоугольника *АБВГД*. (Черт. 133).



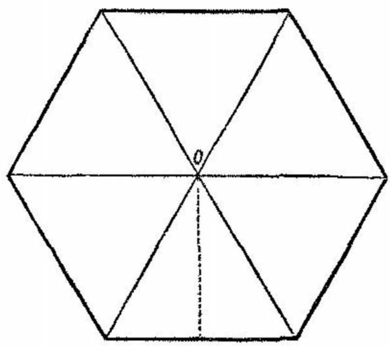
Черт. 135.

3. Вычислить площадь многоугольника *АБВ*... (Черт. 134).

4. Вычислить площадь многоугольника *АБВГДЕ*. (Черт. 135)

VIII. ПЛОЩАДИ ПРАВИЛЬНЫХЪ МНОГОУГОЛЬНИКОВЪ. Данъ правильный многоугольникъ. (Чертежъ 136).

Чтобы вычислить площадь этого многоугольника, поступаемъ такъ. Находимъ центръ многоугольника, для этого дѣлимъ пополамъ два угла, прилежащихъ къ одной сторонѣ, и продолжаемъ равнодѣлящія угловъ до ихъ взаимнаго пересѣченія; точка пересѣченія будетъ центромъ даннаго многоугольника. Соединимъ вершины



Черт. 136.

многоугольника съ центромъ; тогда весь многоугольникъ разобьется на столько равныхъ треугольниковъ, сколько въ многоугольникѣ сторонъ. Площадь каждаго треугольника равна половинѣ произведенія основанія на высоту, а въ данномъ случаѣ—половинѣ произведенія стороны многоугольника на его апоѳему. Площадь всего многоугольника будетъ равна половинѣ произведенія суммы всѣхъ сторонъ многоугольника на апоѳему.

ВЫВОДЪ. Площадь правильнаго многоугольника равняется половинѣ произведенія его периметра на апоѳему.

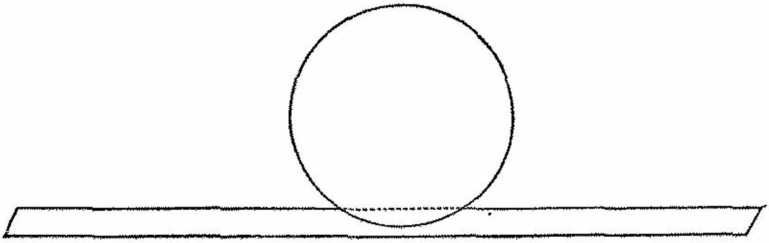
УПРАЖНЕНІЯ. 1. Периметръ правильнаго многоугольника равенъ 3 футамъ, а апоѳема—приблизительно $5^1/_5$ дм. Опредѣлить площадь этого многоугольника.

2. Площадь правильнаго многоугольника равна 64 кв. дюймамъ; апоѳема многоугольника 4 дюйма. Опредѣлить периметръ даннаго многоугольника.

3. Площадь правильнаго многоугольника равна 81 кв. децим. Опредѣлить апоѳему этого многоугольника, если его периметръ равенъ 36 децим.

IX. ИЗМѢРЕНІЕ ОКРУЖНОСТИ И ПЛОЩАДИ КРУГА.

Возьмемъ листъ тонкаго картона, начертимъ на немъ окружность радіусомъ въ 7 сантим.; аккуратно вырѣжемъ



Черт. 137.

ножницами по проведенной окружности кружокъ. Возь-

мемъ узкую полоску бумаги и обогнемъ ею вырѣзанный кружокъ (смотри черт. 137); аккуратно отмѣтимъ карандашемъ и отрѣжемъ часть полоски, которая, какъ разъ, обхватываетъ нашъ кружокъ. Измѣримъ сантим. отрѣзанную часть полоски и увидимъ, что она въ длину равна приблизительно 44 сантим.

Продѣлать такія же упражненія съ окружностью радіусомъ въ $3^1/_2$ сантим. и съ окружностью радіусомъ въ $10^1/_2$ сантим.

ВЫВОДЪ. Когда мы брали кружокъ радіусомъ въ 7 см., намъ, чтобы обтянуть по окружности этого кружка, понадобилась полоска приблизительно въ 44 см. длиною; когда брали кружокъ радіусомъ въ $3^1/_2$ см., то понадобилась полоска длиною приблизительно въ 22 см., а когда брали кружокъ радіусомъ въ $10^1/_2$ см., то полоска потребовалась въ 66 см. Раздѣлимъ длину полоски на длину радіуса того круга, который она огибаетъ ($44 : 7 = 6^2/_7$; $22 : 3^1/_2 = 6^2/_7$; $66 : 10^1/_2 = 6^2/_7$; во всѣхъ случаяхъ мы получимъ одно и тоже частное—$6^2/_7$). Слѣдовательно, можно сказать, что **радіусъ меньше своей окружности приблизительно въ $6^2/_7$ раза.**

Въ задачахъ, которыя встрѣтятся въ этой книгѣ, будемъ принимать окружность въ $6^2/_7$ раза больше своего радіуса. Но нужно помнить, что число $6^2/_7$ не совсѣмъ точно показываетъ отношеніе окружности къ ея радіусу; совершенно точное число для обозначенія этого отношенія невозможно найти.

УПРАЖНЕНІЯ. 1. Во сколько разъ діаметръ меньше своей окружности?

2. Опредѣлить длину окружности, если ея діаметръ равенъ 21 сантим.

3. Опредѣлить длину окружности, если ея радіусъ равенъ 14 вершкамъ.

4. Длина окружности равна 110 футамъ. Опредѣлить длину радіуса и діаметра этой окружности.

5. Діаметръ окружности равенъ 1 футу 9 дюйм. Опредѣлить длину данной окружности.

6. Радіусъ окружности равенъ 4 децим. 9 см. Опредѣлить длину окружности.

7. Длина окружности—5 саж. 1 футъ 8 дюйм. Опредѣлить радіусъ и діаметръ этой окружности.

8. Длина окружности—1 метръ 3 децим. 2 сантим. Опредѣлить радіусъ этой окружности.

9. Начерчена окружность радіусомъ въ 14 сантим.; опредѣлить длину дуги, равной $^1/_4$ этой окружности.

10. Діаметръ окружности равенъ 35 футамъ; опредѣлить длину дуги, равной $^1/_{10}$ окружности.

11. Дуга составляетъ $^1/_4$ окружности и равна 11 вершкамъ. Опредѣлить радіусъ этой дуги.

12. Дуга, составляющая $^1/_6$ окружности, равна 2 арш. 1 вершк. Опредѣлить радіусъ этой дуги.

13. Радіусъ окружности равенъ 1 арш. 5 верш. Опредѣлить длину дуги этой окружности въ 120°, въ 60°, въ 90°.

14. Діаметръ окружности равенъ 2 арш. 3 верш. Опредѣлить длину дуги этой окружности въ 90°. въ 45°, въ 135°, въ 120°.

15. Дуга въ 60° имѣетъ въ длину 1 арш. 6 верш. Опредѣлить радіусъ этой дуги.

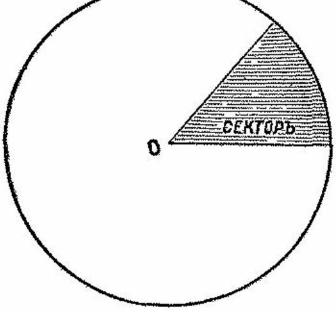
16. Дуга въ 60° длиннѣе дуги въ 45° того же радіуса на 11 верш. Опредѣлить радіусъ этихъ дугъ.

17. Дуга въ 60° короче дуги того же радуіса въ 120°. на 5 арш. 8 верш. Опредѣлить радіусъ этихъ дугъ.

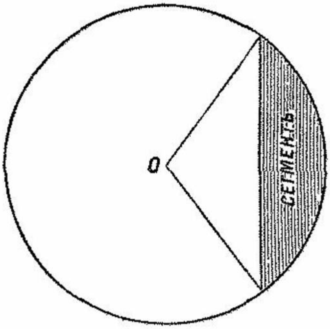
Площадь круга и его частей. Часть плоскости, ограниченная окружностью, называется **кругомъ.** Часть круга, ограниченная двумя радіусами и дугою, лежащею между ними, называется круговымъ **секторомъ.** (Черт. 138).

Часть круга, ограниченная дугою и стягивающею ее хордой, называется круговымъ **сегментомъ.** (Черт. 139).

Кругъ можно разсматривать, какъ правильный многоугольникъ съ безконечнымъ числомъ сторонъ. Въ такомъ

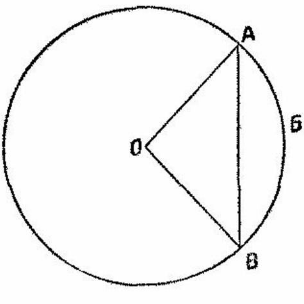


Черт. 138.

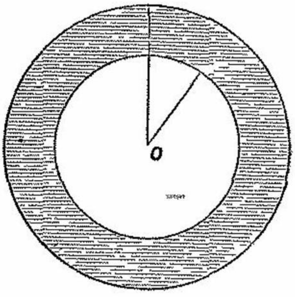


Черт. 139.

случаѣ периметру многоугольника будетъ соотвѣтствовать окружность круга, а апоѳемѣ—радіусъ круга. Слѣдова-



Черт. 140.



Черт. 141.

тельно, можно сказать, что **площадь круга равняется половинѣ произведенія его окружности на радіусъ.**

Площадь сектора равна половинѣ произведенія его дуги на радіусъ.

Чтобы вычислить площадь кругового сегмента, нужно отъ площади сектора *АБВО* (черт. 140) отнять площадь треугольника *ОАВ*.

УПРАЖНЕНІЯ. 1. Радіусъ круга равенъ 7 вершкамъ. Опредѣлить площадь этого круга.

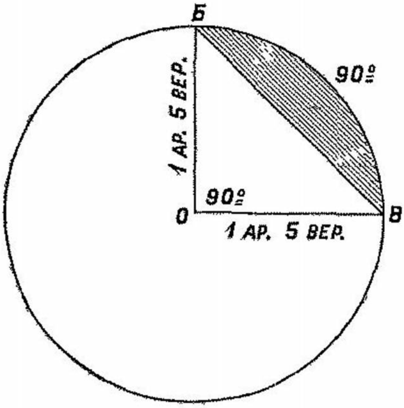
2. Радіусъ круга равенъ 10 дюйм. Опредѣлить площадь даннаго круга.

3. Окружность круга равна 5 арш. 8 верш. Опредѣлить площадь этого круга.

4. Окружность круга равна 1 саж. 4 фут. 11 дюйм. Опредѣлить площадь даннаго круга.

5. Вычислить площадь кольца, если радіусъ большей окружности равенъ 1 децим. 4 сантим., а радіусъ меньшей окружности 1 децим. (Черт. 141).

6. Вычислить площадь кольца, если радіусъ большей окружности равенъ 1 арш., а длина меньшей окружности $5^1/_2$ арш.



Черт. 142.

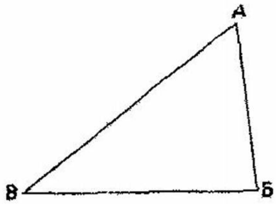
7. Дуга сектора въ 60°. Опредѣлить площадь этого сектора, если его радіусъ равенъ а) 5 верш., б) 7 верш.

8. Радіусъ сектора равенъ 14 арш. Опредѣлить площадь этого сектора, если его дуга содержитъ: а) 45°, б) 90°, в) 135°, г) 120°.

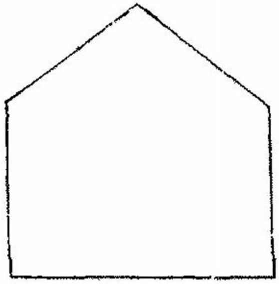
9. Вычислить площадь сегмента, если его дуга содержитъ 90°, а радіусъ дуги равенъ: а) 1 арш. 5 верш., б) 2 арш. 3 верш., в) $3^1/_2$ арш. (Черт. 142).

ГЛАВА VII.

I. ПОНЯТІЕ О ПОДОБНЫХЪ МНОГОУГОЛЬНИКАХЪ. УПРАЖНЕНІЯ. 1. Данъ треугольникъ *АБВ*. На отдѣльномъ листѣ бумаги начертить другой треугольникъ, стороны котораго были бы вдвое болѣе сторонъ даннаго треугольника. Вырѣзать начерченный треугольникъ и наложеніемъ сравнить его углы съ углами даннаго треугольника *АБВ*. Равны ли соотвѣтственные углы этихъ треугольниковъ?

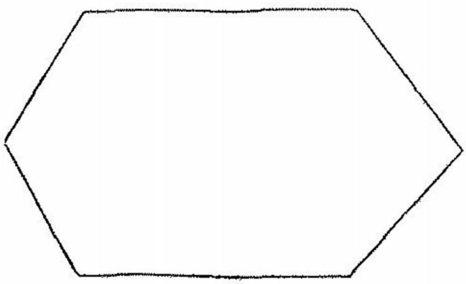


Черт. 143.



Черт. 144.

2. Начертить квадратъ, сторона котораго равна 8 сант., а потомъ начертить другой квадратъ, сторона котораго въ 4 раза меньше стороны перваго.



Черт. 145.

3. Начертить пятиугольникъ, стороны котораго были бы въ 3 раза больше сторонъ пятиугольника, изображен-

наго на чертежѣ 144, а соотвѣтственные углы ихъ равны.

4. Начертить шестиугольникъ, стороны котораго въ $2^1/_2$ раза больше сторонъ шестиугольника, изображеннаго на чертежѣ 145, а соотвѣтственные углы равны.

Многоугольники, въ которыхъ соотвѣтственные углы равны, а стороны одного въ нѣсколько разъ больше или меньше сторонъ другого, называются подобными.

5. Начертить 3 подобныхъ треугольника такъ, чтобы стороны перваго были въ два раза болѣе сходственныхъ сторонъ второго, а стороны третьяго въ три раза болѣе сходственныхъ сторонъ второго треугольника.

6. Начертить двѣ подобныя трапеціи такъ, чтобы стороны второй трапеціи были въ три раза болѣе сходственныхъ сторонъ первой.

7. Начертить 2 правильныхъ шестиугольника; причемъ стороны одного изъ нихъ въ $2^1/_2$ раза болѣе сторонъ другого. Подобны ли эти шестиугольники?

8. Начертить два правильныхъ пятиугольника такъ, чтобы стороны перваго заключали въ себѣ столько дюймовъ, сколько сантиметровъ заключается въ сторонахъ второго пятиугольника. Подобны ли эти пятиугольники?

9. Участокъ земли имѣетъ видъ прямоугольника; длина его равна 50 саж., а ширина 20 саж. Начертить прямоугольникъ, подобный тому, который представляетъ изъ себя данный участокъ, взявъ на чертежѣ вмѣсто 5 саж. 1 сантим.

10. Клумба имѣетъ видъ правильнаго шестиугольника, периметръ котораго равенъ 3 саж. Начертить шестиугольникъ, подобный тому, который представляетъ изъ себя клумба, взявъ вмѣсто 1 саж. 1 дюймъ.

11. Участокъ земли имѣетъ видъ прямоугольнаго треугольника, одинъ катетъ котораго равенъ 375 саж., а другой—250 саж. Начертить треугольникъ, подобный тому, который представляетъ изъ себя данный участокъ, взявъ на чертежѣ 1 сантим. вмѣсто 25 саж.

12. Участокъ земли имѣетъ видъ параллелограмма, одна сторона котораго равна 125 саж., а другая—75 саж.; уголъ, лежащій между этими сторонами, равенъ 45°.

Начертить параллелограммъ, подобный тому, который представляетъ изъ себя данный участокъ, взявъ вмѣсто 10 саженъ 1 сантим.

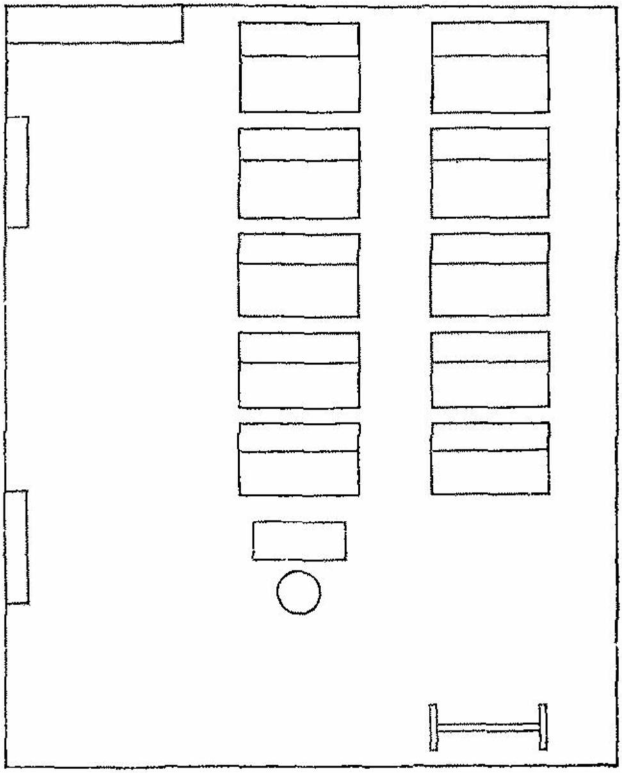
II. ПЛАНЪ КЛАССА. Часто нужно бываетъ изобразить то мѣсто, которое предметъ занимаетъ на поверхности земли. Допустимъ, что намъ нужно изобразить мѣсто, занимаемое классомъ; тогда мы поступаемъ такъ. Беремъ аршинъ и измѣряемъ имъ длину класса. Положимъ, что длина класса равна 10 арш. На бумагѣ линію въ 10 арш. мы начертить не можемъ, такъ какъ не имѣемъ листа бумаги такихъ размѣровъ; тогда на чертежѣ вмѣсто 1 аршина будемъ откладывать по 1 сантим., и длина класса на бумагѣ обозначится линіей въ 10 сантим. Затѣмъ аршиномъ измѣряемъ ширину класса. Допустимъ, что ширина равна 8 аршинамъ; слѣдовательно, на чертежѣ мы должны по ширинѣ отложить 8 сантим. Такъ какъ нашъ классъ имѣетъ форму прямоугольника, то и на бумагѣ мы чертимъ прямоугольникъ. Далѣе можно обозначить тѣ мѣста, которыя заняты предметами, находящимися въ классѣ: столомъ, партами, шкапомъ, печкой и проч. (Смотри черт. 146).

Изображеніе мѣста, занимаемаго предметомъ, называется планомъ.

Чтобы по плану можно было узнать настоящую величину изображенныхъ на немъ предметовъ, на планѣ чертится линія съ обозначеніемъ, какую мѣру она замѣняетъ въ дѣйствительности; или же указывается, во сколько разъ дѣйствительные размѣры уменьшены на планѣ. Маленькая мѣрка, которая берется для плана вмѣсто крупной, называется **масштабомъ.**

Чтобы по плану можно было опредѣлить расположеніе предметовъ по отношенію къ сторонамъ свѣта, принято

планы чертить такъ, чтобы вверху была сѣверная сторона; тогда внизу будетъ южная, направо—восточная, а налѣво—западная сторона.

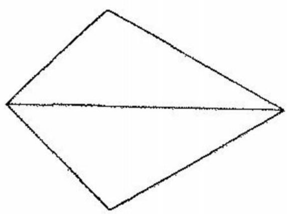


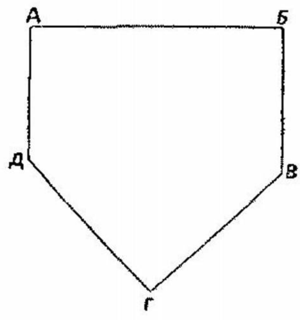
Черт. 146.

На планѣ можно начертить не только классъ и предметы, находящіеся въ немъ, но и весь домъ, дворъ, садъ, большой участокъ земли и проч. Конечно, при черченіи плана какой-нибудь мѣстности сантиметръ или дюймъ придется брать уже не вмѣсто аршина, а вмѣсто 10, 20 50 и болѣе саженъ.

III. ПЛАНЪ УЧАСТКА ЗЕМЛИ. 1. Допустимъ, что требуется начертить планъ участка, имѣющаго видъ треугольника. Тогда можно поступить такъ. Провѣшить и измѣрить каждую сторону этого участка. Допустимъ, что одна сторона его равна 100 саж., другая 120 саж., а третья 140 саж. Вмѣсто 10 саженъ на планѣ можно откладывать по 1 сантим.; и задача сведется къ построенію треугольника по тремъ даннымъ его сторонамъ: одна сторона 10 сантим., другая 12 и третья 14 сантим.

2. Чтобы начертить планъ мѣстности, имѣющей видъ четыреугольника, можно діагональю разбить этотъ четыреугольникъ на два треугольника; и тогда задача сведется къ построенію двухъ треугольниковъ. (Черт. 147).


Черт. 147



Черт. 148.

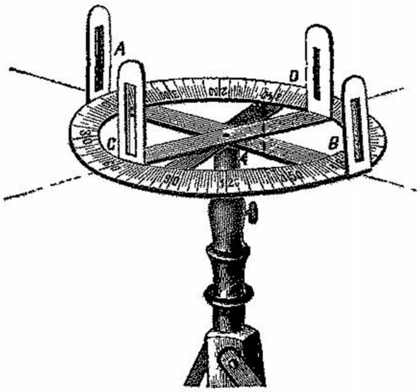
3. Какъ начертить планъ участка, имѣющаго видъ пятиугольника *АБВГД*? (Черт. 148).

Изъ того, что мы говорили о планѣ, можно заключить, что снять планъ какой-нибудь мѣстности—значитъ начертить на бумагѣ въ уменьшенномъ видѣ фигуру, подобную той, которую представляетъ изъ себя данная мѣстность.

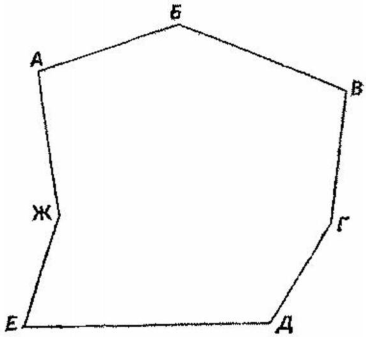
4. Планы мѣстностей обыкновенно снимаются при помощи **астролябіи** или при помощи **мензулы**.

Астролябіей называется приборъ для измѣренія угловъ на поверхности земли. (Черт. 149).

Чтобы нанести на планъ участокъ, имѣющій видъ многоугольника *АБВГ*.... (черт. 150), можно землемѣрной



Черт. 149

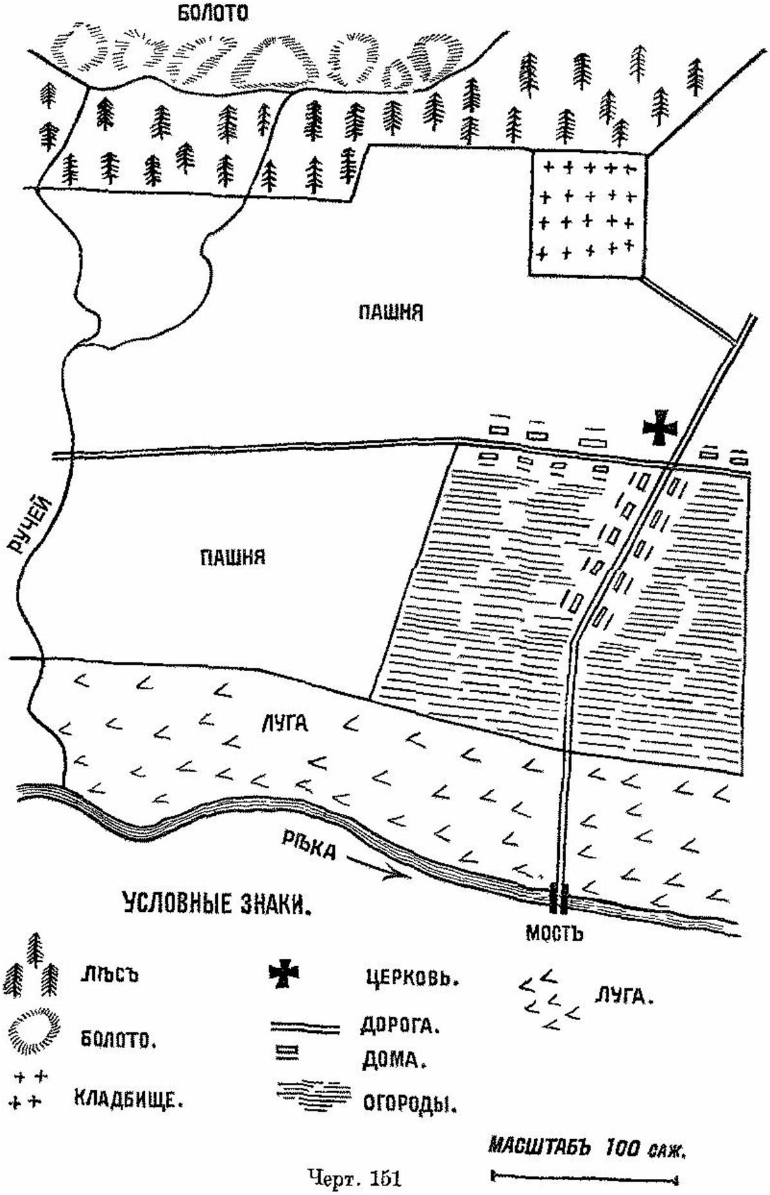


Черт. 150.

цѣпью измѣрить каждую сторону, а астролябіей измѣрить каждый уголъ даннаго многоугольника; затѣмъ при помощи транспортира и масштаба нужно начертить на бумагѣ многоугольникъ, подобный многоугольнику *АБВГ*....

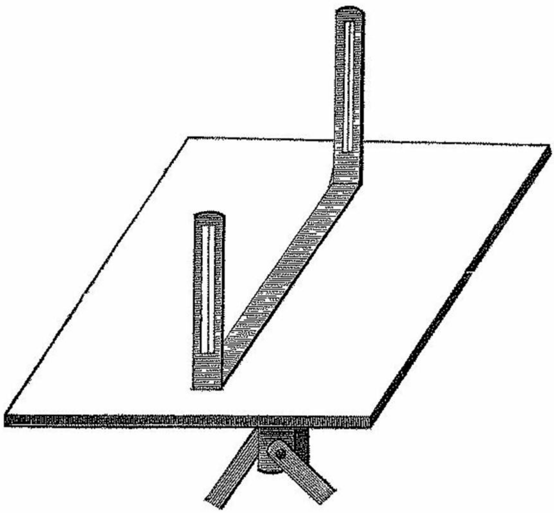
Кромѣ очертаній мѣстности, на планахъ обозначаютъ и то, что расположено на этой мѣстности: дороги, ручьи, рѣки, овраги, лѣса, луга и проч. (Смотри черт. 151).

5. При помощи мензулы планъ участка можно снять такимъ образомъ. Допустимъ, что требуется начертить планъ поля, имѣющаго видъ четыреугольника *АБВГ*. (Черт. 153). Тогда беремъ внутри этого четыреугольника точку и устанавливаемъ въ ней мензулу, доска которой обтянута чистой бумагой. При помощи **алидады** чертимъ на бумагѣ прямыя линіи, выходящія изъ точки *О* и идущія въ вершины четыреугольника. Затѣмъ измѣряемъ разстоянія отъ мензулы до вѣхъ, поставленныхъ на углахъ четыреугольника, и откладываемъ по масштабу эти раз-


БОЛОТО
ПАШНЯ
РУЧЕЙ
ПАШНЯ
ЛУГА
РѢКА
МОСТЪ
УСЛОВНЫЕ ЗНАКИ.
ЛѢСЪ
ЦЕРКОВЬ.
ЛУГА.
БОЛОТО.
ДОРОГА.
ДОМА.
КЛАДБИЩЕ.
ОГОРОДЫ.
МАСШТАБЪ 100 САЖ.

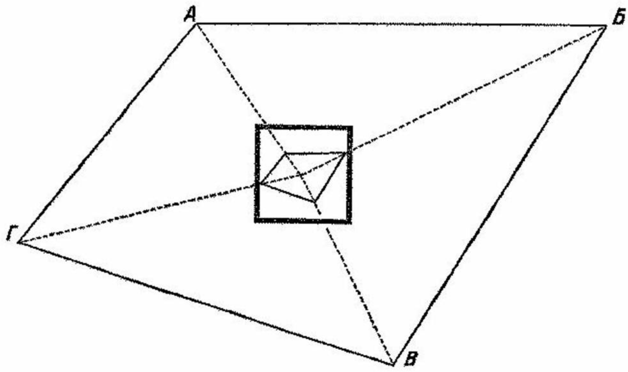
Черт. 151

стоянія на мензулѣ. На бумагѣ получится четыреугольникъ, подобный четыреугольнику *АБВГ*.



Черт. 152. Мензула.

Кромѣ указанныхъ, существуютъ и другіе способы съемки плановъ при помощи астролябіи и мензулы*).



Черт. 153.

*) Со способами съемки плановъ слѣдуетъ познакомить учениковъ не только по книгѣ, но, главнымъ образомъ, на дѣлѣ съ астролябіей и мензулой въ рукахъ.

УПРАЖНЕНІЯ. 1. На планѣ длина участка земли равна 8 дюймамъ. Опредѣлить дѣйствительную длину этого участка, если на планѣ 1 дюймъ взять: а) вмѣсто 50 саж., б) вмѣсто 75 саж., в) вмѣсто 85 саж.

2. Длина дороги на планѣ равна 10 дюймамъ. Опредѣлить дѣйствительную длину данной дороги, если планъ начерченъ въ масштабѣ $^1/_{480}$, $^1/_{900}$, $^1/_{720}$.

3. Поле имѣетъ видъ прямоугольника и изображено на планѣ въ масштабѣ $^1/_{2500}$. Опредѣлить дѣйствительную длину и ширину этого поля, если на планѣ длина равна 8 дюйм., а ширина 6 дюйм.

4. Длина луга равна 450 саж. На планѣ эта длина изображена линіей въ 8 дюйм. Опредѣлить масштабъ плана.

5. Участокъ земли, имѣющій видъ прямоугольника, начерченъ на планѣ въ масштабѣ $^1/_{960}$. Длина этого участка на планѣ равна 4 вершк., а ширина—3 вершк. Что стоитъ окопать канавой данный участокъ со всѣхъ сторонъ, если одна сажень канавы цѣнится въ 15 коп.?

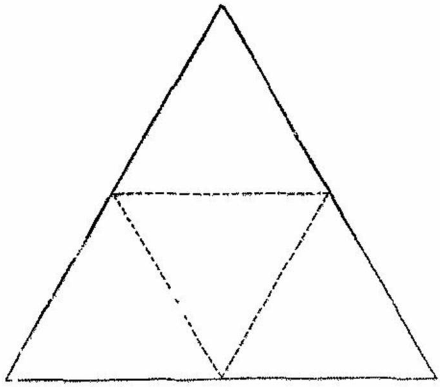
VIII. О ТѢЛАХЪ.

I. ПОНЯТІЕ О ГЕОМЕТРИЧЕСКОМЪ ТѢЛѢ.

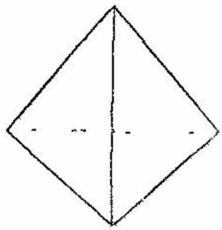
УПРАЖНЕНІЯ. 1. Изъ листа плотной бумаги вырѣзать равносторонній треугольникъ. (Черт. 154). Раздѣлить стороны треугольника пополамъ; средины сторонъ соединить между собою прямыми линіями. (Смотри чертежъ). Перегнуть бумагу по прямымъ, соединяющимъ средины сторонъ треугольника, и привести его вершины въ одну точку. (Черт. 155). Тогда часть пространства ограничится со всѣхъ сторонъ четырьмя плоскостями.

2. На листѣ плотной бумаги начертить и вырѣзать многоугольникъ, изображенный на чертежѣ 156. Сдѣ-

лать перегибы по линіямъ, обозначеннымъ пунктиромъ. Соединить части многоугольника такъ, какъ показано

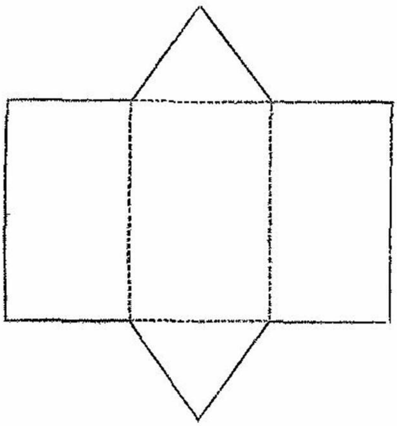


Черт. 154.

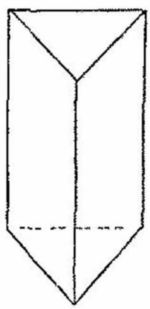


Черт 155.

на чертежѣ 157. Тогда часть пространства ограничится со всѣхъ сторонъ пятью плоскостями.



Черт. 156.



Черт 157

3. Можно ли ограничить часть пространства 7, 8, 9, 10, 12 плоскостями?

4. Можно ли ограничить часть пространства 2 или 3 плоскостями?

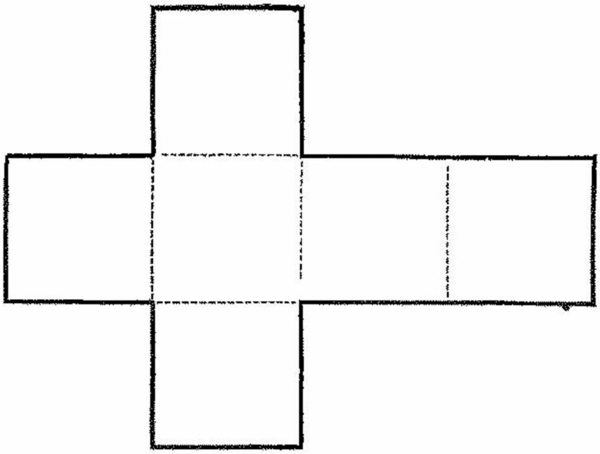
5. Можно ли ограничить часть пространства кривой поверхностью и одной плоскостью?

Часть пространства, ограниченная со всѣхъ сторонъ, называется геометрическимъ тѣломъ.

Каждый предметъ, существующій въ природѣ, занимаетъ какую-нибудь часть пространства. Напримѣръ, камень, книга, дерево, стекло, вода и проч. занимаютъ извѣстное пространство. Геометрія разсматриваетъ предметы только со стороны пространства, ими занимаемаго: для геометріи не важно знать, изъ какого вещества состоитъ предметъ, сколько онъ вѣситъ и проч.

Тѣло, ограниченное пересѣкающимися плоскостями, называется **многогранникомъ**; плоскости, ограничивающія многогранникъ, называются **сторонами** или **гранями**; линіи, по которымъ пересѣкаются грани, называются **ребрами** многогранника; точки пересѣченія реберъ называются **вершинами** многогранника. Сумма сторонъ многогранника называется его **поверхностью**.

II. КУБЪ. При помощи циркуля, линейки и на-



Черт. 158.

угольника построить фигуру, изображенную на чер-

тежѣ 158. Вырѣзать эту фигуру и перегнуть ее по пунктирнымъ линіямъ; получится многогранникъ, ограниченный 6 равными квадратами. Такой многогранникъ называется **кубомъ.**

УПРАЖНЕНІЯ. 1. Сколько реберъ имѣетъ кубъ?

2. Сколько вершинъ имѣетъ кубъ?

3. Прямую или кривую линію представляетъ изъ себя ребро куба?

4. Сколько реберъ сходятся въ одной вершинѣ куба?

5. Сколько граней сходятся въ одной вершинѣ куба?

6. Подъ какими углами пересѣкаются ребра куба?

7. Указать на модели сдѣланнаго куба грани, которыя не пересѣкаются между собой.

8. Указать ребра параллельныя между собой. Указать ребра непараллельныя.

III. ПОЛОЖЕНІЕ ПЛОСКОСТЕЙ И ПРЯМЫХЪ ЛИНІЙ ВЪ ПРОСТРАНСТВѢ. На примѣрѣ куба мы видимъ, что плоскости въ пространствѣ могутъ имѣть два различныхъ положенія: 1) двѣ плоскости могутъ **пересѣкаться**, при чемъ онѣ пересѣкаются всегда по прямой линіи; 2) двѣ плоскости не пересѣкаются, въ такомъ случаѣ онѣ называются **параллельными.**

Прямыя линіи въ пространствѣ имѣютъ три различныхъ положенія: 1) прямыя **пересѣкаются**; 2) прямыя **параллельны**, если онѣ не пересѣкаются и лежатъ въ одной плоскости; 3) прямыя **не пересѣкаются** и **непараллельны.**

Указать на модели куба всѣ три случая расположенія прямыхъ.

Прямая линія и плоскость могутъ имѣть слѣдующія положенія: 1) Прямая можетъ **совпадать** съ плоскостью всѣми своими точками. 2) Прямая можетъ **пересѣкать** плоскость, т.-е. имѣть съ нею одну общую точку; эта точка называется **основаніемъ** прямой. 3) Прямая и плоскость могутъ на всемъ протяженіи не имѣть общихъ точекъ, въ такомъ случаѣ прямая **параллельна** плоскости.

Если прямая *АБ* пересѣкаетъ плоскость такъ, что всякая другая прямая, проходящая по плоскости черезъ основаніе *АБ*, перпендикулярна къ *АБ*, то *АБ* **перпендикулярна** къ самой плоскости. Если прямая не перпендикулярна и не параллельна плоскости, то она называется **наклонной.**

УПРАЖНЕНІЯ. 1. На модели куба указать прямыя перпендикулярныя къ плоскостямъ.

2. Сколько прямыхъ линій въ пространствѣ можно провести черезъ одну точку?

3. Сколько прямыхъ можно провести въ пространствѣ черезъ двѣ точки?

4. Сколько плоскостей можно представить въ пространствѣ проходящими черезъ одну точку?

5. Сколько плоскостей можно представить проходящими черезъ двѣ точки *или* черезъ прямую линію?

6. Сколько плоскостей проходитъ черезъ прямую и точку, лежащую внѣ прямой?

7. Сколько плоскостей можно представить проходящими черезъ три точки, не лежащія на одной прямой?

8. Сколько плоскостей могутъ проходить черезъ двѣ параллельныя прямыя?

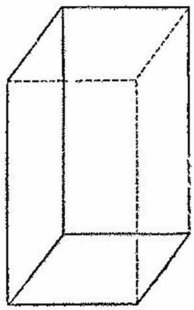
ВЫВОДЫ. 1. **Положеніе прямой линіи въ пространствѣ опредѣляется двумя точками.**

2. **Положеніе плоскости въ пространствѣ, опредѣляется тремя точками.**

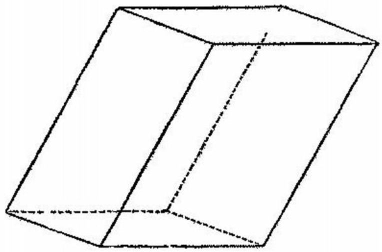
Двѣ плоскости, пересѣкаясь, образуютъ **двухгранный уголъ.** Три плоскости, сходясь въ одной точкѣ, образуютъ **трехгранный уголъ**; четыре плоскости, сходясь въ одной точкѣ, образуютъ **четырехгранный уголъ** и т. д.

УПРАЖНЕНІЕ. На модели куба указать двухгранные и трехгранныя углы.

IV. ПРИЗМА. Призмой называется такой многогранникъ, двѣ грани котораго параллельны, а остальныя грани пересѣкаются по ребрамъ, параллельнымъ между собой. (Черт. 159).



Черт. 159.



Чрт. 160.

Параллельныя грани призмы называются ея **основаніями**, а остальныя грани называются ея **сторонами** или **боковыми гранями.** Перпендикуляръ, опущенный изъ какой-нибудь точки одного основанія на другое, называется **высотою** призмы. Если въ основаніи призмы лежитъ треугольникъ, то призма называется **треугольною**; если въ основаніи призмы лежитъ четыреугольникъ, то призма называется **четыреугольною**, и т. д.

Призма, у которой боковыя ребра перпендикулярны къ основаніямъ, называется **прямой**, а призма, боковыя ребра которой наклонны къ основаніямъ, называется **наклонной.** (Черт. 159 и 160).

Боковое ребро прямой призмы равно ея высотѣ. Въ прямой призмѣ боковыя грани—прямоугольники, а въ наклонной призмѣ боковыя грани—параллелограммы.

Прямая призма, въ основаніи которой лежитъ правильный многоугольникъ, называется **правильной.** Въ правильной призмѣ всѣ боковыя грани равны между собой.

Чтобы вычислить полную поверхность призмы, нужно опредѣлить площади ея основаній и площади боковыхъ сторонъ; затѣмъ всѣ эти площади сложить.

УПРАЖНЕНІЯ. 1. Какую призму можно назвать кубомъ?

2. Въ основаніи прямой призмы лежитъ прямоугольникъ, длина котораго 5 футовъ, а ширина 3 фута; боковое ребро этой призмы равно 8 футамъ.

Начертить полную поверхность этой призмы въ развернутомъ видѣ, взявъ 1 сантим. вмѣсто 1 фута. а) Вычислить боковую поверхность данной призмы. б) Вычислить полную ея поверхность.

3. Въ основаніи прямой призмы лежитъ прямоугольный треугольникъ, катеты котораго 12 и 10 вершковъ; боковое ребро этой призмы равно 1 арш. Вычислить полную поверхность данной призмы.

4. Въ основаніи прямой призмы лежитъ правильный шестиугольникъ, сторона котораго равна 5 дюйм.; боковое ребро этой призмы равно 10 дюйм. Опредѣлить боковую поверхность данной призмы.

5. Периметръ основанія прямой призмы равенъ 1 арш. 4 вершк., а высота этой призмы равна 12 вершк. Опредѣлить боковую поверхность данной призмы.

ВЫВОДЪ. Боковая поверхность прямой призмы равняется периметру ея основанія, умноженному на боковое ребро.

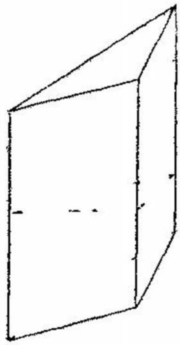
6. Боковая поверхность прямой призмы равна 1 квадр. футу 76 квадр. дюйм.; боковое ребро ея равно 10 дюйм. Опредѣлить периметръ основанія этой призмы.

7. Въ основаніи прямой призмы лежитъ прямоугольникъ, длина котораго равна 6 футамъ. Опредѣлить полную поверхность этой призмы, если периметръ ея основанія 20 футовъ, а боковое ребро 8 футовъ.

8. Ящикъ имѣетъ видъ куба, ребро котораго равно 18 вершк. Опредѣлить полную поверхность этого куба.

9. Желѣзный ящикъ имѣетъ видъ прямой четыреугольной призмы. Длина этого ящика 2 фута, ширина $1^1/_2$ фута, а высота $1^1/_3$ фута. Опредѣлить вѣсъ даннаго ящика, если 1 квадр. дюймъ листа желѣза вѣситъ 2 лота. (Ящикъ безъ крышки).

10. Что стоитъ оштукатурить стѣны и потолокъ четыреугольной комнаты, длина которой 8 арш., ширина 6 арш., а высота $4^1/_2$ арш., если за оштукатурку 1 квадр. аршина берутъ 20 коп.? Поверхность оконъ и дверей этой комнаты въ суммѣ равна 3 квадр. саж.



Черт 161

11. Дана наклонная призма, боковое ребро которой равно 1 футу; если эту призму разсѣчь по плоскости, перпендикулярной къ боковому ребру, то периметръ сѣченія будетъ равенъ 1 футу 3 дюйм. Опредѣлить боковую поверхность данной призмы. (Чертежъ 161).

12. Периметръ перпендикулярнаго сѣченія наклонной призмы равенъ $1^3/_4$ фута, а боковое ребро этой призмы равно 10 дюйм. Опредѣлить боковую поверхность данной призмы.

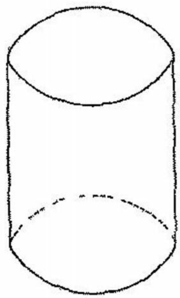
ВЫВОДЪ. Боковая поверхность наклонной призмы равняется периметру перпендикулярнаго сѣченія, умноженному на боковое ребро.

V. ЦИЛИНДРЪ. Часть пространства, ограниченная съ двухъ сторонъ равными параллельными кругами, а съ прочихъ сторонъ кривой поверхностью, называется **цилиндромъ.** (Смотри чертежъ 162).

Цилиндры могутъ быть **прямые** и **наклонные**, мы будемъ разсматривать только прямые цилиндры.

Параллельные круги называются **основаніями** цилиндра, а кривая поверхность называется **боковой поверхностью** цилиндра. Перпендикуляръ, опущенный изъ

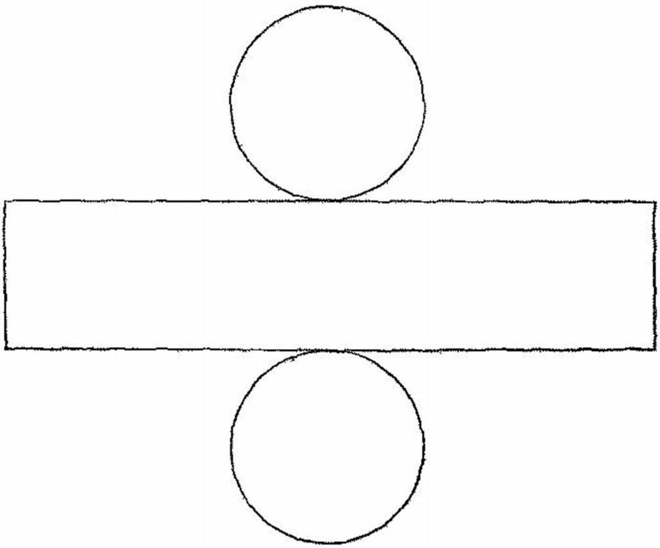
какой-нибудь точки одного основанія на другое, называется **высотою** цилиндра. Линія, соединяющая центры основаній прямого цилиндра, равна высотѣ цилиндра. Прямая линія, проходящая по боковой поверхности прямого цилиндра отъ окружности одного основанія до окружности другого, тоже равна высотѣ цилиндра.



Черт. 162

Чтобы вычислить полную поверхность цилиндра, нужно къ боковой его поверхности прибавить площади двухъ основаній.

УПРАЖНЕНІЯ. 1. Въ основаніяхъ цилиндра лежатъ круги радіуса въ 7 дюйм., а высота



Черт 163

цилиндра равна 10 дюйм. а) Начертить полную поверхность этого цилиндра въ развернутомъ видѣ, взявъ на чертежѣ вмѣсто 2 дюймовъ 1 сантим. (черт. 163). б) Вычислить полную поверхность даннаго цилиндра.

2. Радіусъ основанія цилиндра 5 вершк., а высота его 8 вершк. Опредѣлить полную поверхность даннаго цилиндра.

ВЫВОДЪ. Боковая поверхность прямого цилиндра равняется произведенію окружности его основанія на высоту.

3. Окружность основанія цилиндра равна 1 метру 3 децим. 2 сантим., а высота его—2 децим. 5 сантим. Опредѣлить полную поверхность этого цилиндра.

4. Боковая поверхность цилиндра равна 3300 квадр. футамъ, высота его 15 футовъ. а) Опредѣлить радіусъ основанія этого цилиндра. б) Опредѣлить полную поверхность даннаго цилиндра.

5. Боковая поверхность цилиндра равна 176 квадр. вершк., высота его 7 вершк. Опредѣлить полную поверхность даннаго цилиндра.

6. Полная поверхность цилиндра равна 8 квадр. арш. 240 квадр. вершк.; радіусъ основанія этого цилиндра 14 вершк. Опредѣлить высоту даннаго цилиндра.

7. Полная поверхность цилиндра равна 6 квадр. фут. 104 квадр. дюйм.; радіусъ основанія—7 дюйм. Опредѣлить высоту даннаго цилиндра.

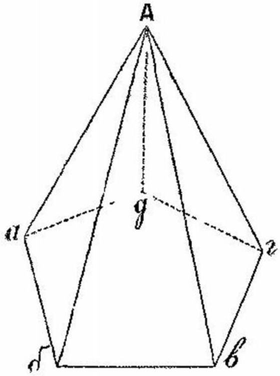
8. Что стоитъ окрасить съ боковъ цилиндрическій столбъ высотою въ 6 арш., а діаметромъ въ 6 вершк., если за окраску 1 квадр. арш. берутъ 20 коп.?

VI. ПИРАМИДА. Пирамидой называется такой многогранникъ, одна сторона котораго—многоугольникъ, а прочія стороны—треугольники, сходящіеся въ одной общей точкѣ. (См. чертежъ 164).

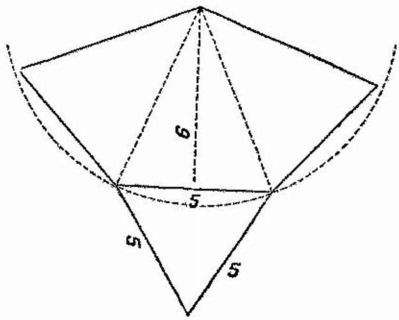
Многоугольникъ *абвгд* называется **основаніемъ** пирамиды; треугольники *абА*, *бвА*, *вгА* и проч. называются **боковыми гранями**, а точка *А*, гдѣ сходятся боковыя грани, называется **вершиной** пирамиды. (Черт. 164). Перпендикуляръ, опущенный изъ вершины пирамиды на ея основаніе, называется **высотой** пирамиды.

Если основаніе пирамиды есть правильный многоугольникъ, и перпендикуляръ, опущенный изъ ея вершины на основаніе, проходитъ черезъ центръ основанія, то такая пирамида называется **правильной.** Боковыя грани правильной пирамиды равны между собой. Высота треугольниковъ, образующихъ боковыя грани правильной пирамиды, называется **апоѳемой** пирамиды.

Пирамида называется **треугольною, четыреугольною, пятиугольною** и т. д., если въ основаніи ея лежитъ треугольникъ, четыреугольникъ, пятиугольникъ и т. д.



Черт. 164.



Черт. 165.

УПРАЖНЕНІЯ. 1. Начертить въ развернутомъ видѣ (въ настоящую величину) поверхность правильной треугольной пирамиды, сторона основанія которой равна 5 сантим., а апоѳема 6 сантим. Вычислить боковую поверхность этой пирамиды. (Черт. 165).

2. Начертить въ развернутомъ видѣ поверхность правильной четыреугольной пирамиды, сторона основанія которой равна 1 арш. 4 вершк., а апоѳема 1 арш. 9 вершк. (Масштабъ $^1/_{20}$). Вычислить полную поверхность данной пирамиды.

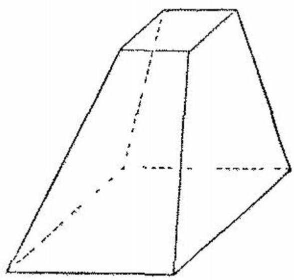
3. Правильная пирамида имѣетъ въ основаніи правильный шестиугольникъ, сторона котораго равна 2 фу-

тамъ. Опредѣлить боковую поверхность этой пирамиды, если ея апоѳема равна $2^1/_2$ футамъ.

ВЫВОДЪ. Боковая поверхность правильной пирамиды равняется *периметру ея основанія*, умноженному на половину апоѳемы.

4. Поверхность крыши на бесѣдкѣ представляетъ изъ себя боковую поверхность правильной восьмиугольной пирамиды, сторона основанія которой равна 2 арш., а апоѳема 3 арш. Сколько потребуется листовъ желѣза для такой крыши, если каждымъ листомъ можно покрыть $1^1/_4$ квадр. арш.?

УСѢЧЕННАЯ ПИРАМИДА. *Если пирамиду пересѣчь* плоскостью, параллельной основанію, то получится многогранникъ, который называется **усѣченной пирамидой.** (Черт. 166).

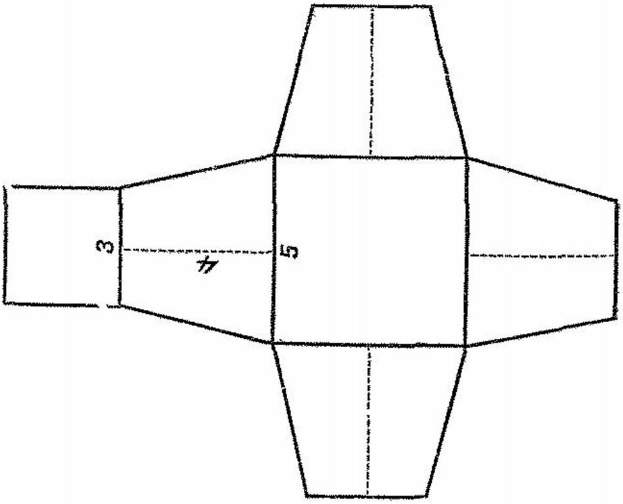

Черт. 166.

Параллельныя грани усѣченной пирамиды называются **основаніями**, а разстояніе между основаніями называется ея **высотой.**

Отъ пересѣченія правильной пирамиды плоскостью, параллельной основанію, получается **правильная** усѣченная пирамида. Боковыя грани правильной усѣченной пирамиды суть равнобедренныя и равныя между собой трапеціи. Высота боковой трапеціи въ правильной пирамидѣ называется **апоѳемой.**

УПРАЖНЕНІЯ. 1. Начертить въ развернутомъ видѣ полную поверхность правильной усѣченной четырехгранной пирамиды, имѣющей стороны большаго основанія по 5 сантим., меньшаго—по 3 сантим., а апоѳему — 4 сантим. (Черт. 167). Вычислить полную поверхность этой пирамиды.

2. Вычислить боковую поверхность правильной усѣченной пирамиды, имѣющей въ основаніяхъ правильные шестиугольники; при чемъ сторона большаго основанія



Черт. 167.

равна 6 дюйм., сторона меньшаго 2 дюйм., а апоѳема — $7^1/_2$ дюйм.

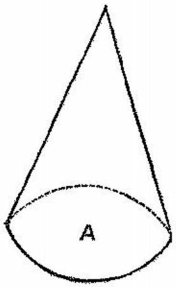
ВЫВОДЪ. Боковая поверхность правильной усѣченной пирамиды равняется произведенію полусуммы периметровъ ея основаній на апоѳему.

3. Вычислить полную поверхность усѣченной четыреугольной пирамиды, имѣющей стороны нижняго основанія по 15 вершк., а стороны верхняго—по 7 вершк.; апоѳема данной пирамиды 8 вершк.

4. Полная поверхность правильной усѣченной четыреугольной пирамиды равна 1 квадр. арш. 145 кв. вершк. Опредѣлить апоѳему данной пирамиды, если сторона одного основанія 8 вершк., а сторона другого основанія 5 вершк.

VII. КОНУСЪ. Часть пространства, ограниченная съ одной стороны кругомъ, а съ прочихъ сторонъ кривой поверхностью, сходящейся въ одной точкѣ, называется **конусомъ.** (Чертежъ 168).

Кругъ *A* называется **основаніемъ** конуса, а кривая поверхность называется **боковой поверхностью** конуса. Точка, въ которой сходится боковая поверхность, называется **вершиной** конуса.



Черт. 168.

Прямая линія, проходящая по боковой поверхности конуса отъ его вершины до окружности основанія, называется **образующей.**

Перпендикуляръ, опущенный изъ вершины на основаніе, называется **высотой** конуса.

Если высота конуса проходитъ черезъ центръ основанія, то конусъ называется **прямымъ.** Всѣ образующія прямого конуса равны между собой.

УПРАЖНЕНІЯ. 1. Начертить въ развернутомъ видѣ полную поверхность прямого конуса, радіусъ основанія котораго равенъ $3^1/_2$ сантим., а образующая 7 сантим. (Черт. 169). Вычислить полную поверхность этого конуса.

2. Вычислить боковую поверхность прямого конуса, окружность основанія котораго равна 15 дюйм., а образующая 8 дюйм.

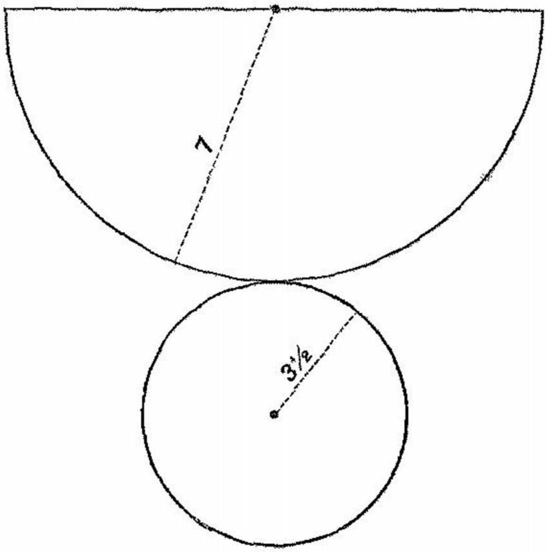
3. Вычислить полную поверхность прямого конуса, имѣющаго радіусъ основанія 14 сантим., а образующую въ 2 децим.

ВЫВОДЪ. Боковая поверхность конуса равняется произведенію окружности его основанія на половину образующей.

4. Боковая поверхность конуса равна 220 квадр. дюйм.

Опредѣлить радіусъ его основанія, если образующая равна 14 дюйм.

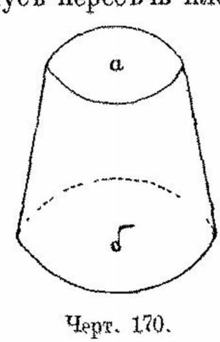
5. Полная поверхность конуса равна 3 квадр. арш.



Черт. 169.

46 квадр. вершк. Опредѣлить образующую этого конуса, если его радіусъ равенъ 7 вершк.

УСѢЧЕННЫЙ КОНУСЪ. Если конусъ пересѣчь плоскостью, параллельной основанію, то получится **усѣченный конусъ.** (Черт. 170).



Черт. 170.

Усѣченный конусъ имѣетъ два **основанія** *а* и *б*. (Чертежъ 170). Разстояніе между основаніями называется **высотой** усѣченнаго конуса. Прямая линія, проходящая по *поверхности* усѣченнаго конуса отъ окружности одного основанія до окружности другого, называется **образующей.** Отъ пе-

ресѣченія прямого конуса плоскостью, параллельной основанію, получается **прямой** усѣченный конусъ.

Прямой усѣченный конусъ можно разсматривать, какъ правильную усѣченную пирамиду съ безконечнымъ числомъ боковыхъ граней. Поэтому **боковая поверхность прямого усѣченнаго конуса равняется произведенію полусуммы окружностей его основаній на образующую**; а чтобы опредѣлить полную поверхность усѣченнаго конуса, нужно къ боковой его поверхности прибавить площади двухъ основаній.

УПРАЖНЕНІЯ. 1. Вычислить полную поверхность усѣченнаго конуса, у котораго діаметръ большаго основанія равенъ 7 вершк., діаметръ меньшаго—$3^1/_2$ вершк., а образующая 5 вершк.

2. Вычислить полную поверхность усѣченнаго конуса, у котораго радіусъ большаго основанія $10^1/_2$ вершк., окружность меньшаго основанія 22 вершка, а образующая 12 вершк.

3. Боковая поверхность усѣченнаго конуса равна 3 квадр. фут. 96 квадр. дюйм.; радіусъ большаго основанія 7 дюйм., а радіусъ меньшаго основанія 5 дюйм. Опредѣлить образующую даннаго конуса.

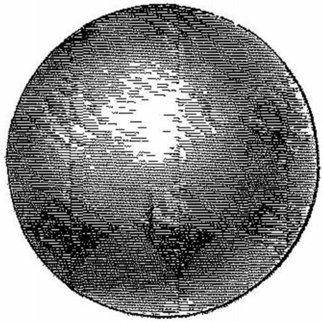
4. Боковая поверхность усѣченнаго конуса равна 14 квадр. фут. 96 квадр. дюйм.; радіусъ большаго основанія 10 дюйм., а радіусъ меньшаго основанія 6 дюйм. Опредѣлить образующую даннаго конуса.

5. Полная поверхность усѣченнаго конуса ра на 19 кв. арш. 206 кв. вершк.; радіусъ большаго основа ія 1 арш. 5 вершк., а окружность меньшаго основанія 2 арш. 12 вершк. Опредѣлить образующую этого конуса.

VIII. ШАРЪ. Часть пространства, ограниченная кривой поверхностью, всѣ точки которой находятся на равномъ разстояніи отъ одной внутренней точки, называется **шаромъ.** (Черт. 171).

Точка, равноотстоящая отъ всѣхъ точекъ поверхности шара, называется **центромъ**; прямая линія, соеди-

няющая центръ съ какой-нибудь точкой поверхности шара, называется **радіусомъ**, а линія, проходящая черезъ центръ и соединяющая двѣ точки поверхности, называется **діаметромъ** шара.



Черт. 171.

Если шаръ пересѣчь плоскостью, то въ сѣченіи всегда будетъ кругъ; чѣмъ ближе къ центру лежитъ плоскость сѣченія, тѣмъ больше получается кругъ, а наибольшій изъ круговъ тотъ, плоскость котораго проходитъ черезъ центръ. Кругъ, образованный сѣченіемъ, проходящимъ черезъ центръ шара, называется **большимъ кругомъ.** Радіусъ большого круга равенъ радіусу шара.

Найдено, что **поверхность шара въ 4 раза больше площади его большого круга.**

УПРАЖНЕНІЯ. 1. Радіусъ шара равенъ 7 дюйм. опредѣлить поверхность этого шара.

2. Опредѣлить поверхность шара, если его діаметръ равенъ 1 арш. 12 вершк.

3. Опредѣлить поверхность шара, если окружность его большого круга равна 1 арш. 6 вершк.

4. Радіусъ земного шара приблизительно равенъ 6000 верст. Опредѣлить въ квадр. верстахъ поверхность земного шара.

5. Окружность большого круга шара 12 арш. 6 вершк. Опредѣлить поверхность этого шара.

6. Площадь большого круга на 231 кв. арш. меньше поверхности шара. Опредѣлить поверхность даннаго шара.

7. Окружность большого круга на 4 арш. 2 вершка длиннѣе радіуса шара. Опредѣлить поверхность даннаго шара.

IX. ИЗМѢРЕНІЕ ОБЪЕМОВЪ ТѢЛЪ.

I. ПОНЯТІЕ ОБЪ ОБЪЕМѢ ТѢЛА. Величина пространства, *занимаемаго тѣломъ*, называется объемомъ этого тѣла. Объемъ иногда называютъ **вмѣстимостью**; напримѣръ, объемъ или вмѣстимость комнаты, вмѣстимость колодца, вмѣстимость ящика. Измѣрить объемъ какого-нибудь тѣла—значитъ сравнить его съ другимъ тѣломъ, объемъ котораго принятъ за единицу. За единицы для измѣренія объемовъ принимаются **кубическій аршинъ, кубическій вершокъ, кубическій футъ** и т. п. Кубическимъ аршиномъ называется часть пространства, равная той, которую занимаетъ кубъ съ ребрами въ одинъ аршинъ. Кубическимъ вершкомъ называется часть пространства, равная той, которую занимаетъ кубъ съ ребрами въ одинъ вершокъ.

УПРАЖНЕНІЯ. 1. Какую часть пространства можно назвать кубическимъ футомъ, кубическимъ дюймомъ, кубическимъ сантиметромъ?

2. Можетъ ли быть кубическій аршинъ въ формѣ пирамиды или цилиндра?

3. Можетъ ли быть кубическій футъ въ формѣ конуса, цилиндра, шара?

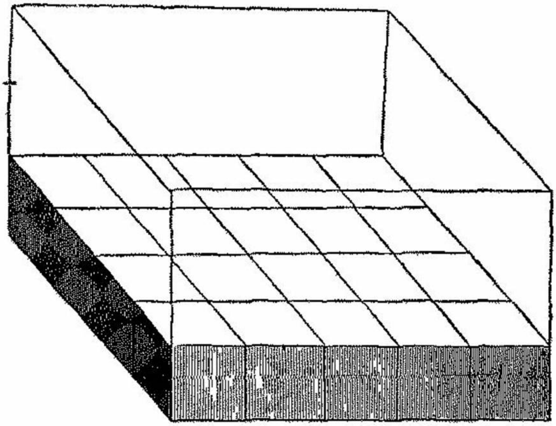
Два тѣла, имѣющія одинаковый бъемъ, называются равновеликими.

4. Можетъ ли быть пирамида равновелика кубу или шару?

5. Можетъ ли быть конусъ равновеликъ цилиндру?

II. ОБЪЕМЪ ПРИЗМЫ. Допустимъ, что намъ нужно измѣрить объемъ (вмѣстимость) ящика, имѣющаго форму *прямоугольной призмы*. (*Черт.* 172). Сравнимъ объемъ даннаго ящика съ объемомъ куба, ребро котораго равно 1 футу, т.-е. съ кубическимъ футомъ. При этомъ поступаемъ такъ. Измѣримъ футомъ длину и ширину ящика. Допустимъ, что длина равна

5 футамъ, а ширина 4 футамъ; тогда на дно ящика можно поставить $5 \times 4 = 20$ кубиковъ. Эти 20 кубиковъ составятъ слой высотою въ 1 футъ. Чтобы узнать, сколько помѣ-



Черт. 172.

стится въ ящикѣ такихъ слоевъ, нужно измѣрить высоту ящика. Пусть высота будетъ 3 фута; тогда объемъ ящика равенъ $20 \times 3 = 60$ кубическимъ футамъ.

УПРАЖНЕНІЯ. 1. Сколько въ кубической сажени кубическихъ аршинъ? (Черт. 173).

2. Сколько въ кубическомъ аршинѣ кубическихъ вершковъ?

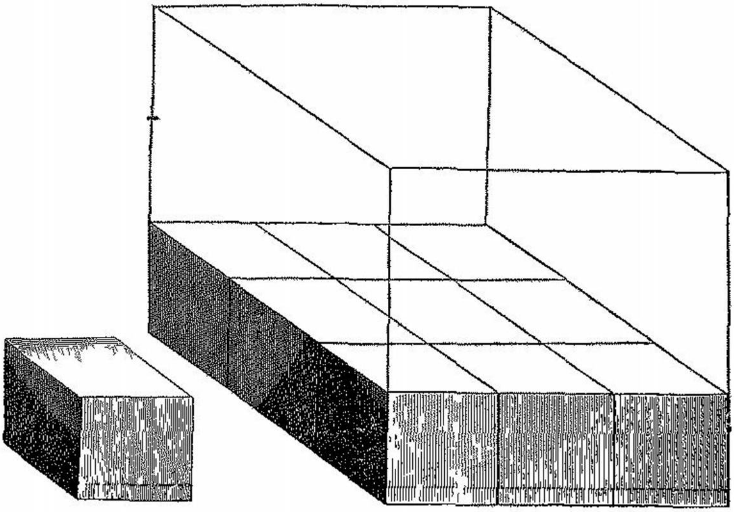
3. Сколько въ кубическомъ метрѣ кубическихъ сантиметровъ?

4. Сколько въ кубическомъ футѣ кубическихъ дюймовъ?

5. Прямоугольная призма имѣетъ въ длину 7 вершк., въ ширину 5 вершк., а въ высоту 10 вершк. Опредѣлить объемъ этой призмы.

6. Въ основаніи призмы лежитъ прямоугольный треугольникъ, одинъ катетъ котораго равенъ 5 дюйм., а другой 4 дюйм. (Черт. 174). Опредѣлить объемъ данной призмы, если ея высота равна 6 дюйм.

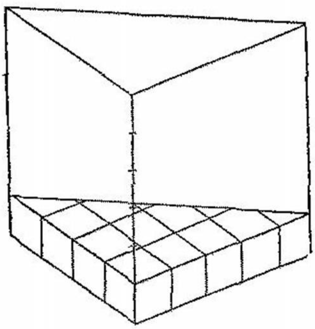
7. Въ основанiи призмы лежитъ параллелограммъ. Основанiе этого параллелограмма—9 вершк., а высота



Черт 173.

6 вершк. Опредѣлить объемъ данной призмы, если ея высота равна 12 вершк.

ВЫВОДЪ. Объемъ прямой призмы равенъ произведенiю площади ея основанiя на высоту.



Черт. 174.

8. Опредѣлить объемъ воздуха, заключеннаго въ прямоугольной комнатѣ, длина которой 25 фут., ширина 18 фут., а высота 12 фут.

9. Прямоугольный ящикъ, длина котораго 1 футъ 3 дюйма, ширина 10 дюйм., а высота 8 дюйм., наполненъ водой. Опредѣлить вѣсъ этой воды, если 1 куб. дюймъ воды вѣситъ $^1/_{25}$ фун.

10. Боковая поверхность прямой призмы равна 3 кв. арш., высота ея 1 арш. Опредѣлить объемъ данной призмы, если въ основанiи ея лежитъ квадратъ.

11. Боковая поверхность прямой призмы равна 4 кв. футамъ 24 кв. дюйм., высота ея 1 футъ 3 дюйма. Опредѣлить объемъ данной призмы, если въ основанiи ея лежитъ прямоугольникъ, у котораго длина болѣе ширины на 4 дюйма.

12. Кубическую сажень камней желаютъ сложить въ формѣ прямоугольной призмы длиною въ 9 арш. и шириною въ $1^1/_2$ арш. Какова будетъ высота этой призмы?

13. Требуется положить 6 кубич. саженъ дровъ въ клѣтки длиною по 3 саж., шириною 12 вершк. и высотою по 1 саж. Сколько получится такихъ клѣтокъ?

14. Землекопы вырыли канаву длиною $45^1/_2$ арш., шириною 3 арш. и глубиною 2 арш. Сколько они должны получить за работу, если за каждую куб. сажень имъ платятъ по 2 руб. 70 коп.?

15. Сколько потребуется кирпичей длиною въ 6 вершк., шириною въ 3 вершка и толщиною въ 2 вершка, чтобы сложить стѣну длиною въ 5 арш. 6 вершк., высотою въ 4 арш. 12 вершк. и толщиною въ 1 арш.?

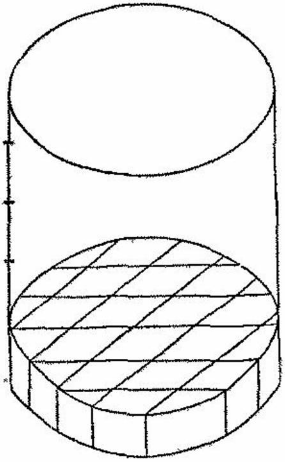
16. Площадь перпендикулярнаго сѣченiя наклонной призмы равна 6 квадр. дюйм., а боковое ребро этой призмы равно 5 дюйм. Равновелика ли эта призма такой прямой призмѣ, площадь основанiя которой равна 6 кв. дюйм., а высота 5 дюйм.?

ВЫВОДЪ. Объемъ наклонной призмы равенъ произведенiю площади перпендикулярнаго сѣченiя на боковое ребро.

III. ОБЪЕМЪ ЦИЛИНДРА. Цилиндръ можно разсматривать, какъ призму, имѣющую въ основанiи правильный многоугольникъ съ безконечнымъ числомъ сторонъ. Поэтому **объемъ цилиндра равенъ произведенiю площади его основанiя на высоту.** (Черт. 175).

УПРАЖНЕНІЯ. 1. Опредѣлить объемъ цилиндра, радіусъ основанія котораго равенъ $3^1/_2$ вершк., а высота 5 вершк.

2. Опредѣлить объемъ цилиндра, радіусъ основанія котораго 21 дюймъ, а высота 4 фута.



Черт. 175.

3. Длина окружности основанія цилиндра 2 саж. 4 фута 4 дюйма. Опредѣлить объемъ этого цилиндра, если высота его 1 футъ 8 дюйм.

4. Длина окружности основанія цилиндра 1 аршинъ 6 вешрк. Опредѣлить объемъ даннаго цилиндра, если его высота 15 вершк.

5. Боковая поверхность цилиндра равна 3 кв. футамъ 8 кв. дюймамъ. Опредѣлить объемъ даннаго цилиндра, если его высота 10 дюймовъ.

6. Боковая поверхность цилиндра равна 7 кв. футамъ 48 кв. дюймамъ. Опредѣлить объемъ даннаго цилиндра, если его высота 1 футъ 4 дюйма.

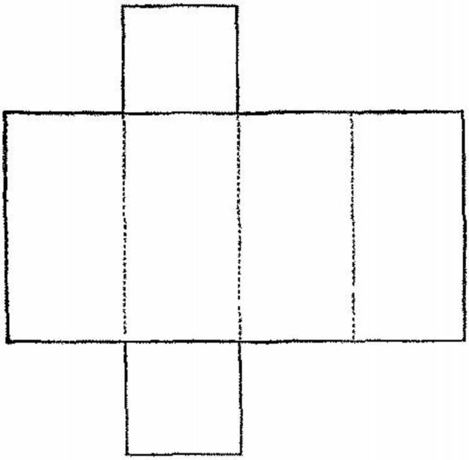
7. Боковая поверхность цилиндра 4 кв. фута 84 кв. дюйма. Опредѣлить объемъ этого цилиндра, если радіусъ его 5 дюймовъ.

8. Боковая поверхность цилиндра равна 5 кв. децим. 28 кв. сантим. Опредѣлить объемъ этого цилиндра, если окружность его основанія 33 сантим.

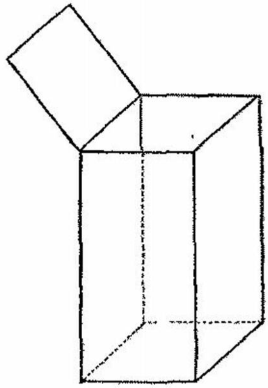
9. Объемъ цилиндра 1 куб. метръ 540 куб. сантим. Опредѣлить высоту даннаго цилиндра, если площадь его основанія равна 154 кв. сантим.

10. Сосудъ имѣетъ цилиндрическую форму; діаметръ его дна (внутри) 21 сантим., а глубина 25 сантим. Сколько литровъ вмѣщаетъ данный сосудъ? (Литръ равенъ 1 куб. дециметру).

IV. ОБЪЕМЪ ПИРАМИДЫ И КОНУСА. Объемъ пирамиды равенъ произведенію площади ея основанія на $^1/_3$ высоты. Въ этомъ можно убѣдиться посредствомъ такого опыта. Сдѣлать изъ тонкаго картона двѣ коробки: одну въ видѣ призмы, а другую въ видѣ пирамиды. Основанія и высоты этихъ коробокъ должны



Черт. 176.



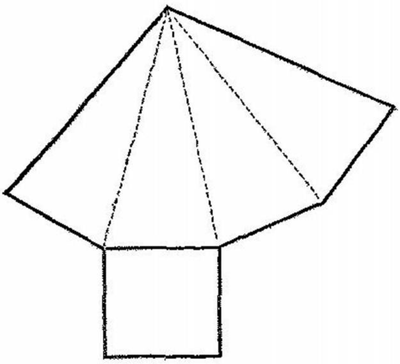
Черт. 177.

быть равны между собой. (Смотри чертежи 176—179). Затѣмъ насыпать песку въ пирамиду, а изъ пирамиды въ призму. Такимъ образомъ увидимъ, что объемъ призмы въ 3 раза болѣе объема пирамиды, имѣющей съ призмой равное основаніе и высоту.

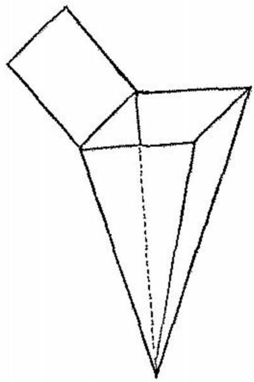
Конусъ можно разсматривать, какъ пирамиду, въ основаніи которой лежитъ правильный многоугольникъ съ безконечнымъ числомъ сторонъ. Поэтому **объемъ конуса равенъ произведенію площади его основанія на $^1/_3$ высоты.**

УПРАЖНЕНІЯ. 1. Въ основаніи пирамиды лежитъ прямоугольникъ, одна сторона котораго 8 вершк., а другая 6 вершк. Опредѣлить объемъ этой пирамиды, если высота ея 15 вершк.

2. Въ *основаніи пирамиды лежитъ* прямоугольный треугольникъ, одинъ катетъ котораго въ 7 дюйм., а другой въ 10 дюйм. Опредѣлить объемъ этой пирамиды, если ея высота 1 футъ 4 дюйма.



Черт. 178.



Черт. 179.

3. Объемъ пирамиды равенъ 156 куб. сантим. Найти высоту данной пирамиды, если площадь ея основанія равна 39 кв. сантим.

4. Объемъ пирамиды равенъ 3 куб. саж. 15 куб. арш. Найти площадь основанія данной пирамиды, если ея высота 12 арш.

5. Объемъ пирамиды равенъ 1 куб. арш. 64 куб. вершк., высота ея 1 арш. 4 вершк.; въ основаніи этой пирамиды лежитъ прямоугольный треугольникъ, одинъ катетъ котораго 8 вершк. Опредѣлить другой катетъ.

6. Опредѣлить объемъ конуса, радіусъ основанія котораго 21 сантим., а высота 3 дециметра.

7. Длина окружности основанія конуса 1 саж. 2 фута 2 дюйма. Опредѣлить объемъ этого конуса, если высота его 1 футъ 9 дюйм.

8. Боковая поверхность конуса равна $47^1/_7$ кв. дюйм., образующая этого конуса 5 дюйм. Опредѣлить объемъ даннаго конуса, если высота его 4 дюйма.

9. Объемъ конуса равенъ 77 куб. вершкамъ. Найти высоту даннаго конуса, если радіусъ его основанія $^1/_2$ вершка.

10. Объемъ конуса $115^1/_2$ куб. вершковъ. Опредѣлить высоту этого конуса, если окружность его основанія 1 арш. 6 вершк.

11. Опредѣлить вѣсъ массивнаго желѣзнаго конуса, радіусъ основанія котораго 5,3 дюйма, высота 42,6 дюйма, если желѣзо въ 7,8 тяжелѣе воды, а куб. дюймъ воды вѣситъ $^1/_{25}$ фунта.

12. Опредѣлить вѣсъ пирамиды, сдѣланной изъ чугуна, если въ основаніи пирамиды лежитъ квадратъ, сторона котораго равняется 2 фут. 1 дюйму, а высота пирамиды $2^1/_2$ фута. Чугунъ въ $7^1/_2$ разъ тяжелѣе воды, а 1 куб. дюймъ воды вѣситъ $^1/_{25}$ фунта.

V. ОБЪЕМЪ ШАРА. Чтобы опредѣлить объемъ шара, нужно поверхность шара умножить на $^1/_3$ радіуса.

УПРАЖНЕНІЯ. 1. Радіусъ шара 35 сантим. Опредѣлить его объемъ.

2. Діаметръ шара 2 арш. 12 вершк. Опредѣлить объемъ даннаго шара.

3. Окружность большого круга 12 арш. 6 вершк. Опредѣлить объемъ даннаго шара.

4. Окружность большого круга на 74 сантим. больше радіуса шара. Опредѣлить объемъ этого шара.

5. Сколько стоитъ золотой шаръ, радіусъ котораго $3^1/_2$ дюйма, если 1 куб. дюймъ золота вѣситъ $^{19}/_{25}$ фунта, а фунтъ золота стоитъ 280 рублей?

6. Опредѣлить вѣсъ массивнаго желѣзнаго шара, радіусъ котораго 7 дюйм., если желѣзо въ 7,8 раза тяжелѣе воды, а кубическій дюймъ воды вѣситъ $^1/_{25}$ фунта.

РАЗНЫЯ ЗАДАЧИ.

1. Одинъ изъ смежныхъ угловъ на 30° болѣе другого. Опредѣлить въ градусахъ величину каждаго угла.

2. Одинъ изъ смежныхъ угловъ въ 4 раза болѣе другого. Опредѣлить въ частяхъ прямого величину каждаго угла.

3. *Одинъ изъ* 4 *угловъ, образованныхъ* пересѣченіемъ двухъ прямыхъ линій, въ 5 разъ болѣе другого. Опредѣлить въ градусахъ величину каждаго угла.

4. Вокругъ одной точки расположены три угла; первый уголъ вдвое меньше второго, а второй втрое меньше третьяго. Опредѣлить въ градусахъ величину каждаго изъ этихъ угловъ.

5. Діаметръ окружности равенъ 2 арш. 3 вершк. Опредѣлить длину окружности.

6. Длина окружности 14 саж. 1 футъ. Опредѣлить радіусъ данной окружности.

7. Окружность длиннѣе своего діаметра на 15 сантим. Опредѣлить длину окружности и діаметра.

8. Окружность длиннѣе своего діаметра на 2 арш. 13 вершк. Опредѣлить длину окружности и діаметра.

9. Радіусъ короче своей окружности на $18^1/_2$ футовъ. Опредѣлить длину окружности и радіуса.

10. Дуга въ 60° равна 3 фут. 8 дюйм. Опредѣлить радіусъ этой дуги.

11. Дуга въ 90° длиннѣе дуги того же радіуса въ 75° на 11 сантим. Опредѣлить радіусъ данныхъ дугъ.

12. Дуга, составляющая $^3/_8$ своей окружности, длиннѣе дуги того же радіуса въ 60° на 2 фут. $3^1/_2$ дюйма. Опредѣлить радіусъ данныхъ дугъ.

13. Часы показываютъ ровно 3 часа. Опредѣлить уголъ, образованный стрѣлками часовъ.

14. Часы показываютъ 5 часовъ. Опредѣлить уголъ, образованный стрѣлками часовъ.

15. Опредѣлить уголъ, образованный стрѣлками часовъ, если часы показываютъ 8 часовъ.

16. Опредѣлить уголъ, образованный стрѣлками, если часы показываютъ 10 часовъ.

17. Начерчены двѣ параллельныя линіи и пересѣчены третьей линіей такъ, что одинъ уголъ получился въ 36°. Опредѣлить величину каждаго изъ остальныхъ 7 угловъ.

18. Начерчены двѣ параллельныя линіи и пересѣчены третьей такъ, что одинъ уголъ получился въ 48°. Опредѣлить величину остальныхъ 7 угловъ.

19. При помощи линейки и наугольника начертить 4 параллельныя линіи на разстояніи 1 сантим. 5 миллим. другъ отъ друга: первую длиною въ 6 сантим., вторую—7 сантим. и т. д.

20. Сколько можно провести діагоналей изъ одной вершины десятиугольника, двѣнадцатиугольника, пятнадцатиугольника?

21. На сколько треугольниковъ діагоналями, проведенными изъ одной вершины, дѣлится семиугольникъ, девятиугольникъ, пятнадцатиугольникъ?

22. Можетъ ли треугольникъ имѣть одну сторону въ 8 сантим., другую въ 5 сантим., а третью въ 3 сантим.

23. Можетъ ли треугольникъ имѣть одну сторону въ 10 дюймовъ, другую въ 4 дюйма, а третью въ 3 дюйма?

24. Одна сторона треугольника равна 2 метр., другая—7 метр., а третья выражается цѣлымъ числомъ метровъ. Найти величину третьей стороны.

25. Одна сторона треугольника 5 арш., другая 8 арш., а третья сторона выражается цѣлымъ числомъ аршинъ. Какова можетъ быть величина третьей стороны?

26. Можетъ ли треугольникъ имѣть одинъ уголъ въ $^2/_5$ прямого, а другой въ 120°?

27. Можетъ ли треугольникъ имѣть одинъ уголъ въ $^3/_4$ прямого, а другой въ 135°?

28. Уголъ при вершинѣ равнобедреннаго треугольника равенъ 80°. Опредѣлить величину угловъ при основанiи даннаго треугольника.

29. Одинъ изъ острыхъ угловъ прямоугольнаго треугольника въ 3 раза болѣе другого остраго угла. Опредѣлить углы даннаго треугольника?

30. Первый уголъ треугольника въ 2 раза болѣе второго, а второй въ 3 раза болѣе третьяго. Опредѣлить величину каждаго угла даннаго треугольника.

31. Внѣшнiй уголъ прямоугольнаго треугольника 145°. Опредѣлить внутреннiе углы даннаго треугольника.

32. Внѣшнiй уголъ при основанiи равнобедреннаго треугольника 100°. Опредѣлить внутреннiе углы даннаго треугольника.

33. Внѣшнiй уголъ треугольника въ 4 раза больше внутренняго смежнаго съ нимъ и на 64° больше одного изъ внутреннихъ угловъ, съ нимъ несмежныхъ. Опредѣлить внутреннiе углы даннаго треугольника.

34. Периметръ параллалограмма равенъ 14 аршин., одна его сторона на 1 арш. болѣе другой. Опредѣлить стороны даннаго параллелограмма.

35. Периметръ прямоугольника 3 саж. 5 фут.; длина прямоугольника на 3 фута болѣе ширины. Опредѣлить длину и ширину даннаго прямоугольника.

36. Одинъ уголъ параллелограмма на 20° болѣе другого. Опредѣлить углы даннаго параллелограмма.

37. Опредѣлить углы параллелограмма, если одинъ уголъ составляетъ $^1/_3$ другого.

38. Уголъ при большемъ основанiи равнобедренной трапецiи составляетъ $^1/_2$ угла при меньшемъ основанiи. Опредѣлить углы данной трапецiи.

39. Опредѣлить сумму внутреннихъ угловъ шестиугольника, десятиугольника, пятнадцатиугольника.

40. Опредѣлить внутреннiй уголъ правильнаго десятиугольника, двѣнадцатиугольника, пятнадцатиугольника.

41. Опредѣлить внѣшній уголъ правильнаго двѣнадцатиугольника, пятнадцатиугольника, двадцатиугольника.

42. Внутренній уголъ правильнаго многоугольника равенъ 120°. Опредѣлить число сторонъ этого многоугольника.

43. Опредѣлить число сторонъ правильнаго многоугольника, если внутренній уголъ этого многоугольника равенъ 135°.

44. Опредѣлить число сторонъ правильнаго многоугольника, если внутренній уголъ этого многоугольника равенъ 162°.

45. Поле, имѣющее видъ прямоугольника, изображено на планѣ въ масштабѣ $^1/_{8400}$. Опредѣлить дѣйствительную длину и ширину этого поля, если на планѣ длина равна $4^1/_2$ дюймамъ, а ширина $3^1/_2$ дюйм.

46. Длина участка земли равна 250 саж. На планѣ длина даннаго участка равна 6 дюйм. Опредѣлить масштабъ плана.

47. Опредѣлить площадь прямоугольника, длина котораго 5 арш. 7 вершк., а ширина 3 арш. 10 вершк.

48. Опредѣлить площадь квадрата, периметръ котораго 5 футовъ.

49. Сколько стоитъ участокъ земли прямоугольной формы длиною въ 75 саж., а шириною въ 40 саж., если цѣнить землю по 30 коп. кв. сажень?

50. Что стоитъ окрасить полъ прямоугольной комнаты, длина которой 7 арш., а ширина 5 арш. 4 верш. если за окраску 1 кв. саж. платить по 90 коп.?

51. Участокъ лѣса имѣетъ видъ параллелограмма основаніе котораго 750 саж., а высота 300 саж. Сколько стоитъ этотъ участокъ, если десятину лѣса цѣнить въ 540 рублей?

52. Поле имѣетъ видъ треугольника, основаніе котораго 320 саж., а высота 240 саж. Сколько десятинъ въ этомъ полѣ?

53. Огородъ имѣетъ видъ трапеціи, параллельныя стороны которой 50 и 34 саж., а высота 45 саж. Опредѣлить площадь огорода.

54. Діагонали ромба 8 и 6 дюймовъ. Опредѣлить площадь даннаго ромба.

55. Периметръ правильнаго многоугольника 12 саж. 5 фут., а апоѳема 2 саж. Опредѣлить площадь этого многоугольника.

56. Радіусъ круга 1 саж. Опредѣлить площадь этого круга.

57. Окружность круга 40 саж. 1 арш. Опредѣлить площадь даннаго круга.

58. Окружность круга длиннѣе его діаметра на 10 саж. Опредѣлить площадь даннаго круга.

59. Опредѣлить площадь сектора, радіусъ котораго 1 футъ 2 дюйма, а дуга 60°.

60. Опредѣлить площадь сектора, радіусъ котораго 3 саж., а дуга 135°.

61. Опредѣлить площадь круговото сегмента, дуга котораго содержитъ 90°, а радіусъ круга равенъ 4 фут. 1 дюйм.

62. Въ основаніи прямой призмы лежитъ прямоугольникъ, длина котораго 8 дюйм., а ширина 6 дюйм. Опредѣлить полную поверхность этой призмы, если ея высота 12 дюйм.

63. Въ основаніи прямой призмы лежитъ прямоугольный треугольникъ, имѣющій катеты въ 10 и 7 сантим. Опредѣлить полную поверхность этой призмы, если высота ея 14 сантим.

64. Периметръ перпендикулярнаго сѣченія наклонной призмы равенъ 14 верш., а боковое ребро 9 верш. Опредѣлить боковую поверхность этой призмы.

65. Опредѣлить полную поверхность куба, ребро котораго 1 футъ 3 дюйма.

66. Вычислить, сколько стоитъ окрасить стѣны и по-

толокъ классной комнаты, если за окраску 1 кв. саж. берутъ 27 коп.? (Окна и двери не считаются).

67. Опредѣлить полную поверхность прямого цилиндра, высота котораго 5 фут., а радіусъ основанія $1^1/_2$ фута.

68. Опредѣлить боковую поверхность цилиндрическаго столба высотою въ 6 арш., а діаметромъ въ 5 верш.

69. Опредѣлить полную поверхность пирамиды, въ основаніи которой лежитъ квадратъ съ сторонами по 6 верш., а высота боковой грани 7 верш.

70. Опредѣлить полную поверхность усѣченной пирамиды, въ основаніяхъ которой лежатъ квадраты съ сторонами по 8 и по 5 дюйм., а высота боковыхъ граней 7 дюйм.

71. Опредѣлить боковую поверхность четыреугольной правильной усѣченной пирамиды, если параллельныя стороны ея боковыхъ граней 8 и 5 сантим., а высота боковой грани 9 сантим.

72. Опредѣлить боковую поверхность конуса, радіусъ основанія котораго 1 футъ 2 дюйма, а образующая 1 футъ 8 дюйм.

73. Опредѣлить полную поверхность конуса, окружность основанія котораго 6 арш. 14 верш., а образующая 3 арш. 4 верш.

74. Усѣченный конусъ въ основаніи имѣетъ кругъ радіусомъ въ 1 футъ 2 дюйма, а въ сѣченіи кругъ радіусомъ въ $10^1/_2$ дюйм. Опредѣлить полную поверхность даннаго конуса, если его образующая 1 футъ 3 дюйма.

75. Опредѣлить поверхность шара, радіусъ котораго 2 арш. 3 вершка.

76. Опредѣлить поверхность шара, окружность большого круга котораго 5 фут. 6 дюйм.

77. Вычислить объемъ куба, ребро котораго равно 3 фут. 9 дюйм.

78. Площадь основанія прямой призмы —75 кв. дюйм., а высота призмы 1 футъ 5 дюйм. Опредѣлить объемъ данной призмы.

79. Діаметръ основанія цилиндра 42 сантим., а высота $^1/_2$ метра. Опредѣлить объемъ цилиндра.

80. Площадь основанія пирамиды 1 кв. арш. 24 кв. верш., а высота 18 верш. Опредѣлить объемъ этой пирамиды.

81. Окружность основанія конуса равна 6 арш. 3 верш., а высота 1 арш. 11 верш. Опредѣлить объемъ даннаго конуса.

82. Опредѣлить объемъ шара, если его діаметръ равенъ 42 сантим.

83. Опредѣлить объемъ пирамиды, если площадь ея основанія 5 кв. арш. 80 кв. верш., а высота 2 арш. 10 верш.

84. Діаметръ основанія конуса 4 фута 7 дюйм., а высота 12 верш. Опредѣлить объемъ этого конуса.

85. Опредѣлить объемъ шара, если окружность его большого круга равна 1 метру 32 сантим.